Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Vollständige Induktion

Lasse Heckelmann, September 19, 2023

Outline

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten
- Wir können bisher für Aussagen A über natürliche Zahlen also feststellen dass:

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten
- Wir können bisher für Aussagen A über natürliche Zahlen also feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten
- Wir können bisher für Aussagen A über natürliche Zahlen also feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten
- Wir können bisher für Aussagen A über natürliche Zahlen also feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist
  - $A(3)$ *wahr* ist

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Grenzen vorheriger Beweismethodiken

Wir können:

- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen direkt herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Kontrapositionsbeweises herleiten
- einzelne Sätze aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen mithilfe eines Widerspruchsbeweises herleiten
- Wir können bisher für Aussagen A über natürliche Zahlen also feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist
  - $A(3)$ *wahr* ist
  - $A(n)$ für ein beliebiges n feststellen, dass $A(n)$ *wahr* ist, aber nicht für alle $n \in \mathbb{N}$

Wie zeigen wir, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt?

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N}$$

*

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N}$$

*

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 3 \in \mathbb{N}$$

*

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 3 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 4 \in \mathbb{N}$$

*

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 3 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 4 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 5 \in \mathbb{N}$$

*

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 3 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 4 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 5 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 6 \in \mathbb{N}$$

*

Was sind natürliche Zahlen?

Gesucht: Möglichkeit unendlich viele Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen
Folgefrage: Was sind eigentlich natürliche Zahlen?

Definition: Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{N}$) wird definiert durch

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$

Damit gilt also:

$$1 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 2 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 3 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 4 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 5 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} 6 \in \mathbb{N} \overset{(2.)}{\Rightarrow} \ldots \in \mathbb{N}$$

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- 1 ist positiv

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- 1 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 2 ist positiv

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- 1 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 2 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 3 ist positiv

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- 1 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 2 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 3 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 4 ist positiv

Informeller Induktionsbeweis

Zeige: Alle natürlichen Zahlen sind positiv.
Beweis durch Induktion:

1. 1 ist positiv
2. Wenn eine natürliche Zahl k positiv ist, dann ist auch $k' = k + 1$ positiv, weil $0 < k < k + 1$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- 1 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 2 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 3 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- 4 ist positiv und somit gilt laut (2.) auch
- ...

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

$\square$

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$

$\square$

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- $1 > 0$

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- $1 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- $2 > 0$

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- $1 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- $2 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- $3 > 0$

Formalisierter Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

Beweis durch Induktion:

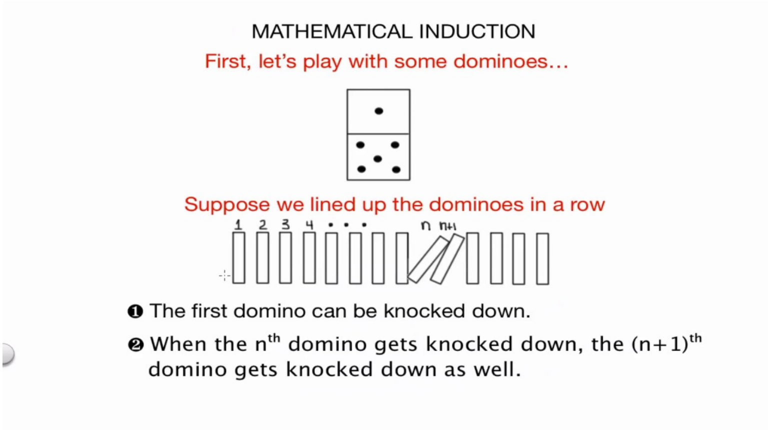
1. **Induktionsanfang:** $1 > 0$
2. **Induktionsvorraussetzung:** Angenommen die Aussage gelte bereits für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, also $k > 0$
3. **Induktionsschritt:** Zeige, dass $k > 0 \Rightarrow k + 1 > 0$ gilt. Dies gilt, weil $k + 1 > k \overset{IV}{>} 0$.

$\square$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt, denn:

- $1 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- $2 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- $3 > 0$ und somit gilt laut (2.) auch
- ...

Vollständige Induktion als Dominosteine



Source: `https://www.youtube.com/watch?v=8HQ7RgBc0so`

Abstrakter Aufbau eines Induktionsbeweises

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt

Abstrakter Aufbau eines Induktionsbeweises

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt
2. Nehme an, dass $A(k)$ für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ bereits gelte.

Abstrakter Aufbau eines Induktionsbeweises

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt
2. Nehme an, dass $A(k)$ für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ bereits gelte.
3. Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt

Abstrakter Aufbau eines Induktionsbeweises

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt
2. Nehme an, dass $A(k)$ für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ bereits gelte.
3. Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt
4. Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen

Komplexerer Induktionsbeweis

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$

Induktionsanfang

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1^2+1}{2} \checkmark$$

Beispiel

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Induktionsschritt:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)$$

Beispiel

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung (IV) und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) &\overset{IV}{=} \frac{k^2+k}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= \frac{(k^2+2k+1)+(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} \checkmark
\end{aligned}
$$