

Vollständige Induktion

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

September 28, 2020

Outline

- 1 Sätze und Definitionen
- 2 Motivation
- 3 Aufbau
- 4 Beispiel

Ein Satz ist die Niederschrift einer beweisbar wahren mathematischen Erkenntnis.

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
 - $A(1)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
 - $A(1)$ *wahr* ist
 - $A(2)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
 - $A(1)$ *wahr* ist
 - $A(2)$ *wahr* ist
 - $A(3)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
 - $A(1)$ *wahr* ist
 - $A(2)$ *wahr* ist
 - $A(3)$ *wahr* ist
 - ... für ein beliebiges n feststellen, dass $A(n)$ *wahr* ist, aber nicht für alle

Idee:

- 1 Zeige, dass $A(0)$ erfüllt

Idee:

- 1 Zeige, dass $A(0)$ erfüllt
- 2 Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt

Idee:

- 1 Zeige, dass $A(0)$ erfüllt
- 2 Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt
- 3 Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen

Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n}{2}$

Induktionsanfang

Es gilt

$$\sum_{i=1}^0 i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0^2 + 0}{2} \checkmark$$

Beispiel

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Induktionsschritt:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k + 1)$$

Beispiel

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung (IV) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k+1) &\stackrel{IV}{=} \frac{k^2 + k}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k}{2} + \frac{2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k^2 + 2k + 1) + (k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2} \checkmark \end{aligned}$$