Vollständige Induktion

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

Sätze

Ein Satz ist die Niederschrift einer beweisbar wahren mathematischen Erkenntnis.

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist
  - $A(3)$ *wahr* ist

Motivation

- Beweise für einzelne Aussagen sind herleitbar
- ... aber wie beweisen wir unendlich viele zusammenhängende Aussagen?
- *Beispiel:* $A(n) : \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)(n-1) = n^2 - 1$
- Wir können bisher feststellen dass:
  - $A(1)$ *wahr* ist
  - $A(2)$ *wahr* ist
  - $A(3)$ *wahr* ist
  - ... für ein beliebiges n feststellen, dass $A(n)$ *wahr* ist, aber nicht für alle

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt
2. Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt

Idee:

1. Zeige, dass A(0) erfüllt
2. Zeige, dass $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ für ein beliebiges aber festes k gilt
3. Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen

Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$

Induktionsanfang

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0^2+0}{2} \checkmark$$

Beispiel

Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Induktionsschritt:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i \right) + (k+1)$$

Beispiel

Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung (IV) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) &\overset{IV}{=} \frac{k^2+k}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k^2+2k+1)+(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} \checkmark\end{aligned}$$