

Mengenlehre

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

- 1 Darstellung von Mengen
 - Venn-Diagramme
 - Mächtigkeit
- 2 Wichtige Mengen von Zahlen
- 3 Prädikatenlogik
 - Quantoren
 - Negation
 - Verwendung von mehreren Quantoren
- 4 Relationen zwischen Mengen
 - Potenzmenge
- 5 Mengenoperationen
 - Differenz
 - Vereinigung
 - Schnitt
 - Komplement

Mengen

Definition (Menge)

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Diese Objekte m nennen wir **Elemente** von M und schreiben kurz: $m \in M$ („ m ist Element aus M “). Um auszudrücken, dass ein Element x nicht in M enthalten ist, wird $x \notin M$ geschrieben.

Darstellung von Mengen

- aufzählende Schreibweise

$$J = \{Frühling, Sommer, Herbst, Winter\}$$

- elliptische Schreibweise

$$S = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

- beschreibende Schreibweise

$$M = \{ \text{Objekte } m \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{„für die gilt“}} \quad m \text{ erfüllt eine logische Aussage} \}$$

Venn-Diagramme

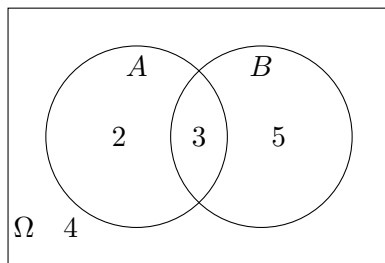


Figure 1: Venn-Diagramm mit zwei Mengen

Mächtigkeit

Definition (Mächtigkeit)

Sei M eine endliche Menge. Die **Anzahl der Elemente** (oder auch **Mächtigkeit** oder **Betrag**) dieser Menge ist definiert als:

$$\#(M) := |M| := \text{Anzahl der Elemente von } M$$

Beispiele:

- $4 = |\{1, 3, 5, 7\}| = |\{1, 1, 3, 5, 5, 5, 7, 7\}|$
- $0 = |\emptyset|$

Wichtige Menge von Zahlen

Definition (Leere Menge)

Die **Leere Menge** enthält keine Elemente und wird als $\{ \}$ oder \emptyset geschrieben.

- Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$
- Die *reellen Zahlen*
 $\mathbb{R} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^n a_k \cdot 10^k \mid n \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}$
- Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert

Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert
- Aussagen über Mengen beschreiben Eigenschaften der Elemente oder Enthaltenseinsbeziehung

Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert
- Aussagen über Mengen beschreiben Eigenschaften der Elemente oder Enthaltenseinsbeziehung
- Beschreibung mithilfe von Quantoren

Quantoren

Allquantor: Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft E für alle Elemente einer Menge gilt wird der *Allquantor* \forall genutzt:

$$\forall x \in M : E(x)$$

(„Für alle Elemente x in M gilt Eigenschaft E .“)

Existenzquantor: Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft für mindestens ein Element einer Menge zutrifft wird der *Existenzquantor* \exists genutzt:

$$\exists x \in M : E(x)$$

(„Es existiert ein Element x in M , für das die Eigenschaft E gilt.“)

Negation

Eine quantifizierte Aussage kann negiert werden, indem der jeweils andere Quantor verwendet und die Eigenschaft negiert wird:

$$\neg(\forall x : x \text{ hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \exists x : x \text{ hat nicht Eigenschaft } E$$

$$\neg(\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \forall x : x \text{ hat nicht Eigenschaft } E$$

Verwendung von mehreren Quantoren

- Verwendung mehrerer Quantoren möglich
- Reihenfolge der Quantoren ist für Bedeutung der Aussage entscheidend

Beispiele:

- Für alle natürlichen Zahlen existiert eine natürliche Zahl, die größer ist.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m$$

- Es existiert eine natürliche Zahl, für die alle natürlichen Zahlen größer sind.

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : n < m$$

- Alle rationalen Zahlen lassen sich als Bruch aus einer ganzen und einer natürlichen Zahl ohne Null darstellen.

$$\forall q \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : q = \frac{z}{n}$$

Relationen zwischen Mengen

Definition (Teilmenge)

Seien M, N zwei Mengen, dann ist M genau dann eine **Teilmenge** von N , wenn jedes Element der Menge M auch ein Element der Menge N ist:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow \forall m \in M : m \in N$$

Relationen zwischen Mengen

Lemma (Leere Menge als Teilmenge)

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge. Für jede Menge M gilt also $\emptyset \subseteq M$.

Lemma (Transitivität für Teilmengen)

*Seien A, B, C Mengen und gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$.
Dann gilt $A \subseteq C$.*

Relationen zwischen Mengen

Definition (Gleichheit von Mengen)

Seien M, N zwei Mengen. Wir nennen die Mengen M und N **gleich**, wenn für alle Elemente gilt, dass sie genau dann in M enthalten sind, wenn sie auch in N enthalten sind:

$$M = N :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

Die Gleichheit von Mengen kann auch unter Benutzung der Teilmengenrelation definiert werden: Wir nennen die Mengen M und N gleich, wenn sowohl M eine Teilmenge von N als auch N Teilmenge von M ist.

$$M = N :\Leftrightarrow M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$$

Potenzmenge

Definition (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Die **Potenzmenge** der Menge M ist diejenige Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau sämtliche Teilmengen der Menge M sind.

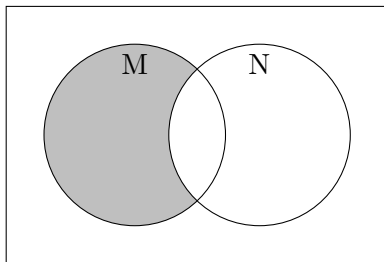
Schreibe: $\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$

Mengenoperationen - Differenz

Definition (Differenz)

Seien M, N Mengen. Die **Differenz** $M \setminus N$ („ M ohne N “), ist diejenige Teilmenge von M , welche genau die Elemente von M enthält, die nicht in der Menge N sind.

Schreibe: $M \setminus N := \{m \mid m \in M \wedge m \notin N\}$

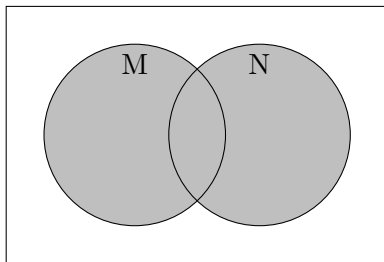


Mengenoperationen - Vereinigung

Definition (Vereinigung)

Seien M, N Mengen. Die **Vereinigung** $M \cup N$ („ M vereinigt (mit) N “) enthält genau die Elemente, die in mindestens einer der Mengen M und N vorkommen.

Schreibe: $M \cup N := \{m \mid m \in M \vee m \in N\}$

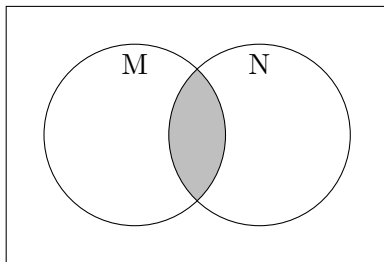


Mengenoperationen - Schnitt

Definition (Schnitt)

Seien M, N Mengen. Der **Schnitt** $M \cap N$ („ M geschnitten (mit) N “) ist diejenige Menge, welche aus genau den Elementen besteht, welche sowohl in M als auch in N enthalten sind.

Schreibe: $M \cap N := \{m \mid m \in M \wedge m \in N\}$

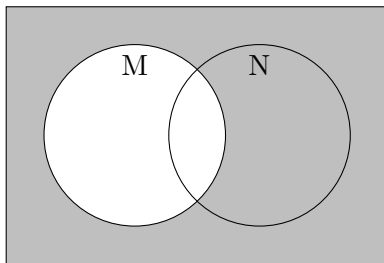


Mengenoperationen - Komplement

Definition (Komplement)

Sei M eine Teilmenge einer Menge Ω . Das **Komplement** $M^c = \overline{M}$ der Menge M (bezüglich der Menge Ω) besteht aus allen übrigen, nicht in M enthaltenen Elementen von Ω .

Schreibe: $M^c := \overline{M} := \Omega \setminus M$.



Eigenschaften

Lemma (Eigenschaften)

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetz: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributivgesetz: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Regeln von de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Eigenschaften

Lemma (Eigenschaften)

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

Absorbtionsregeln: $A \cap (A \cup B) = A$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Doppelnegation: $\neg\neg A = A$

Kontraposition: $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$