Grundlagen der Linearen Algebra

Moritz Buhr

October 8, 2020

Outline

Definition (Matrix)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix A ist formal eine rechteckige Anordnung von Objekten in tabellarischer Form. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ,$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet. Diese Einträge können Zahlen oder auch andere Objekte (Polynome, Funktionen, etc.) sein.

Matrizenaddition

Definition (Matrizenaddition)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $m \times n$-Matrizen A und B definiere die Summe

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition (Matrizenmultiplikation)

Seien $m, n, l \in \mathbb{N}$. Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times l$-Matrix. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist definiert als

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Einheitsmatrix

Definition (Einheitsmatrix)

Eine quadratische Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ sind, nennt man Einheitsmatrix. Eine solche Matrix hat also auf der Hauptdiagonalen Einsen und ansonsten Nullen. Einheitsmatrizen werden meist durch E, E_n oder I_n (für "'identity"') abgekürzt, wobei n der Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entspricht.

Inverse Matrix

Definition (Inverse Matrix)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$.
Eine Matrix $A \in M^{n \times n}$ heißt invertierbar in $M^{n \times n}$, falls es eine Matrix $B \in M^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Die Matrix B nennen wir dann die inverse Matrix oder auch die Inverse von A, geschrieben A^{-1}.

Satz

Falls eine Matrix A invertierbar ist, so ist ihre inverse Matrix eindeutig, d.h. es gibt genau eine Matrix A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Bestimmung der inversen Matrix

Satz (Gauß-Jordan-Algorithmus)

Sei $n \in \mathbb{N}$ *und* M *eine Menge mit* $0 \in M$ *und* $1 \in M$. *Sei weiter* $A \in M^{n \times n}$. *Formt man* A *mit den folgenden Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix* E_n *um und wendet man die gleichen Zeilenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix an, so erhält man die inverse Matrix von* A.
Die Zeilenumformungen sind

- *Multiplikation der* i*-ten Zeile einer Matrix mit einem invertierbaren Skalar* $\lambda \in M$ $(1 \leq i \leq n)$
- *Addition des* λ*-fachen der* k*-ten Zeile einer Matrix zur* i*-ten Zeile* $(1 \leq k, i \leq n,\ k \neq i,\ \lambda \in M)$
- *Vertauschen der* i*-ten und* k*-ten Zeile einer Matrix* $(1 \leq i, k \leq n)$.