Grundlagen der Linearen Algebra

Moritz Buhr

October 7, 2020

Outline

1. Problemstellung
2. Grundlagen der Matrizenrechnung
   - Matrizenaddition
   - Matrizenmultiplikation
3. Umformung von Gleichungssystemen
   - Invertieren von Matrizen

Problemstellung

Wir interessieren uns für die Lösung von Gleichungssystemen der Form

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

durch eine geeignete Belegung der Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

Einführungsbeispiel

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 153$$
$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 111$$

Einführungsbeispiel

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 153$$
$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 111$$

Lösung bestimmbar durch Addition/Subtraktion von Zeilen voneinander:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 42$$
$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 111$$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 42$$
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 69$$

Grundlagen der Matrizenrechnung

Definition (Matrix)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix A ist formal eine rechteckige Anordnung von Objekten in tabellarischer Form. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet. Diese Einträge können Zahlen oder auch andere Objekte (Polynome, Funktionen, etc.) sein.

Matrizenaddition

Definition (Matrizenaddition)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $m \times n$-Matrizen A und B definiere die Summe

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel Matrizenaddition

Bei der Addition von Matrizen gleicher Dimensionen werden die Einträge an gleicher Stelle jeweils addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

Beispiel Matrizenaddition

Bei der Addition von Matrizen gleicher Dimensionen werden die Einträge an gleicher Stelle jeweils addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Definition (Matrizenmultiplikation)

Seien $m, n, l \in \mathbb{N}$. Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times l$-Matrix. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist definiert als

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Beispiel Matrizenmultiplikation

Bei der Multiplikation von Matrizen mit geeigneten Diimensionen werden die jeweiligen Einträge multipliziert und die Produktie addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$=$$

Beispiel Matrizenmultiplikation

Bei der Multiplikation von Matrizen mit geeigneten Diimensionen werden die jeweiligen Einträge multipliziert und die Produktie addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Beispiel Matrizenmultiplikation

Bei der Multiplikation von Matrizen mit geeigneten Diimensionen werden die jeweiligen Einträge multipliziert und die Produktie addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Definition (Einheitsmatrix)

Eine quadratische Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ sind, nennt man Einheitsmatrix. Eine solche Matrix hat also auf der Hauptdiagonalen Einsen und ansonsten Nullen. Einheitsmatrizen werden meist durch E, E_n oder I_n (für "‘identity"’) abgekürzt, wobei n der Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entspricht.

Inverse Matrix

Definition (Inverse Matrix)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$.
Eine Matrix $A \in M^{n \times n}$ heißt invertierbar in $M^{n \times n}$, falls es eine Matrix $B \in M^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Die Matrix B nennen wir dann die inverse Matrix oder auch die Inverse von A, geschrieben A^{-1}.

Satz

Falls eine Matrix A invertierbar ist, so ist ihre inverse Matrix eindeutig, d.h. es gibt genau eine Matrix A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Beispiel inverse Matrix

Bei der Multiplikation von Matrizen mit ihrer Inversen ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=$$

Beispiel inverse Matrix

Bei der Multiplikation von Matrizen mit ihrer Inversen ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot -1 \\ 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot -1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Beispiel inverse Matrix

Bei der Multiplikation von Matrizen mit ihrer Inversen ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot -1 \\ 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der inversen Matrix

Satz (Gauß-Jordan-Algorithmus)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$. Sei weiter $A \in M^{n \times n}$. Formt man A mit den folgenden Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix E_n um und wendet man die gleichen Zeilenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix an, so erhält man die inverse Matrix von A. Die Zeilenumformungen sind

- *Multiplikation der i-ten Zeile einer Matrix mit einem invertierbaren Skalar $\lambda \in M$ $(1 \leq i \leq n)$*
- *Addition des λ-fachen der k-ten Zeile einer Matrix zur i-ten Zeile $(1 \leq k, i \leq n,\ k \neq i,\ \lambda \in M)$*
- *Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile einer Matrix $(1 \leq i, k \leq n)$.*

Beispiel Gauß-Jordan

Bestimmung der Inversen mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gauß-Jordan

Bestimmung der Inversen mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gauß-Jordan

Bestimmung der Inversen mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$