

Grundlagen der Linearen Algebra

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

- 1 Grundlagen der Matrizenrechnung
 - Matrizenaddition
 - Matrizenmultiplikation

- 2 Umformung von Gleichungssystemen
 - Invertieren von Matrizen

Grundlagen der Matrizenrechnung

Definition (Matrix)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine **Matrix** A ist formal eine rechteckige Anordnung von Objekten in tabellarischer Form. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte bezeichnet. Diese Einträge können Zahlen oder auch andere Objekte (Polynome, Funktionen, etc.) sein.

Matrizenaddition

Definition (Matrizenaddition)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $m \times n$ -Matrizen A und B definiere die **Summe**

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
 &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation

Definition (Matrizenmultiplikation)

Seien $m, n, l \in \mathbb{N}$. Seien A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $n \times l$ -Matrix. Das **Produkt** dieser beiden Matrizen ist definiert als

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\
 &:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nl} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Einheitsmatrix

Definition (Einheitsmatrix)

Eine quadratische Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ sind, nennt man **Einheitsmatrix**. Eine solche Matrix hat also auf der Hauptdiagonalen Einsen und ansonsten Nullen. Einheitsmatrizen werden meist durch E , E_n oder I_n (für "identity") abgekürzt, wobei n der Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entspricht.

Inverse Matrix

Definition (Inverse Matrix)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$.

Eine Matrix $A \in M^{n \times n}$ heißt **invertierbar** in $M^{n \times n}$, falls es eine Matrix $B \in M^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Die Matrix B nennen wir dann die **inverse Matrix** oder auch die Inverse von A , geschrieben A^{-1} .

Satz

Falls eine Matrix A invertierbar ist, so ist ihre inverse Matrix eindeutig, d.h. es gibt genau eine Matrix A^{-1} , sodass $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Bestimmung der inversen Matrix

Satz (Gauß-Jordan-Algorithmus)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$. Sei weiter $A \in M^{n \times n}$. Formt man A mit den folgenden Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix E_n um und wendet man die gleichen Zeilenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix an, so erhält man die inverse Matrix von A . Die Zeilenumformungen sind

- Multiplikation der i -ten Zeile einer Matrix mit einem invertierbaren Skalar $\lambda \in M$ ($1 \leq i \leq n$)
- Addition des λ -fachen der k -ten Zeile einer Matrix zur i -ten Zeile ($1 \leq k, i \leq n$, $k \neq i$, $\lambda \in M$)
- Vertauschen der i -ten und k -ten Zeile einer Matrix ($1 \leq i, k \leq n$).