Übungszettel 7 – Lineare Algebra

7.1 Berechne die folgenden Summen:

(a)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

7.2 Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

7.3 Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?

7.4 Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

7.5 Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

7.6 Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7.7 Beweise: Eine beliebige 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

Hinweis: Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.