

Gleichungen

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

- 1 Lineare Gleichungen
- 2 Quadratische Gleichungen
 - Linearfaktoren
 - Binomische Formeln
 - Der Satz von Viëta
 - Quadratische Ergänzung
- 3 Polynomgleichungen
- 4 Polynomdivision

Lineare Gleichungen

Definition (Lineare Gleichung)

Eine **lineare Gleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax + b = 0$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**.

Die Unbekannte taucht in der lineare Gleichung nur in erster Potenz ($x = x^1$) auf.

Quadratische Gleichungen

Definition (Quadratische Gleichung)

Eine **quadratische Gleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hierbei sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**.

Linearfaktoren

Satz (Linearfaktoren einer quadratischen Funktion)

Eine quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ mit Nullstellen x_1 und x_2 gilt:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Aus diesen **Linearfaktoren** können die Nullstellen direkt abgelesen werden.

Binomische Formeln

Lemma (Binomische Formeln)

Durch Ausmultiplizieren ergeben sich die folgenden drei binomischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ bin. Formel})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ bin. Formel})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{ bin. Formel})$$

Der Satz von Viëta

Satz (Der Satz von Vi"eta)

Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann die Lösungen x_1 und x_2 , wenn gilt

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung wird die erste binomische Formel genutzt und danach die Wurzel gezogen, um die Nullstellen zu finden:

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0 && | -q \\ \Leftrightarrow x^2 + px &= -q && | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 && | 1. \text{ bin. Formel} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 && | \sqrt{\cdot} \quad (\text{Achtung: Zwei L\u00f6sungen}) \\ \Leftrightarrow x_{1,2} + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} && | - \frac{p}{2} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} && (pq\text{-Formel})\end{aligned}$$

Polynomgleichungen

Definition (Polynomgleichung)

Eine **Polynomgleichung** (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Hierbei sind die a_i die sogenannten **Koeffizienten**, wobei $a_n \neq 0$.

Der Term auf der linken Seite wird als **Polynom** bezeichnet. Die Zahl n , die den größten Exponenten angibt, wird als **Grad** des Polynoms bezeichnet.

Polynomdivision

- **Ziel:** Grad einer Polynomgleichung reduzieren, indem man Faktoren herauszieht
- **Gegeben:** Polynomgleichung $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ und eine Nullstelle x_1 der Gleichung
- Bei Division des Polynoms durch $(x - x_1)$ erhält man $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0$ vom Grad $n - 1$
- Insgesamt also:

$$0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i = (x - x_1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$