Aussagenlogik

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

September 28, 2020

Outline

Aussagen

Definition (Aussage)

Eine Aussage ist ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert *wahr* (kurz w bzw. 1) oder *falsch* (kurz f bzw. 0) zuordnen lässt.

Beispiele:

- Die Kuh ist lila..

Gegenbeispiele:

- "Ist Wasser grün?"

Abkürzung von Aussagen häufig durch Buchstaben:

$$\underbrace{\text{„Die Kuh ist lila.“}}_{=:\ A}$$

Junktoren

- Verknüpfung logischer Aussagen zu komplexeren Aussagen
- Wahrheitswerte werden abhängig von Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen definiert

Beispiele:

- Die Kuh ist *nicht* lila.
- Die Kuh ist lila *oder* die Kuh ist *nicht* lila.
- Wenn das Gras grün ist, dann ist die Kuh lila.

Negation

Definition (Negation)

Die Negation der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder $\overline{A}$. Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Negation

Definition (Negation)

Die Negation der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder $\overline{A}$. Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	$\neg A$
f	w
w	f

Konjunktion

Definition (Konjunktion)

Die Konjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Konjunktion

Definition (Konjunktion)

Die Konjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion

Definition (Disjunktion)

Die Disjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Disjunktion

Definition (Disjunktion)

Die Disjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

Definition (Implikation)

Die Implikation der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Implikation

Definition (Implikation)

Die Implikation der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Äquivalent

Definition (Äquivalenz)

Die Äquivalenz (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Äquivalent

Definition (Äquivalenz)

Die Äquivalenz (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Klammerung

- Verknüpfung Junktoren enthaltenden Aussagen möglich
- Problem:

$$\text{Welchen Wahrheitswert hat } A \vee B \wedge C \text{ ?}$$

- Einführung einer Klammerung zur Priorisierung
- Zur Vereinfachung haben die logischen Verknüpfungen hier folgende (absteigende) Priorität

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Achtung: Diese Priorisierung wird nicht immer vereinbart!

Tautologie, Widerspruch, Äquivalenz

Definition (Tautologie)

Eine Aussage, welche stets wahr ist, nennen wir Tautologie.

Definition (Widerspruch)

Eine Aussage, welche stets falsch ist, nennen wir Widerspruch.

Definition (Äquivalenz)

Zwei Aussagen A und B heißen äquivalent, geschrieben $A \equiv B$, falls sie stets den selben Wahrheitswert besitzen.

Wichtige Regeln

$$
\begin{aligned}
\text{Kommutativgesetz:} \quad & A \wedge B \equiv B \wedge A \\
& A \vee B \equiv B \vee A \\
\text{Assoziativgesetz:} \quad & (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \\
& (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \\
\text{Distributivgesetz:} \quad & (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\
& (A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\
\text{Regel von de Morgan:} \quad & \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \\
& \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

Wichtige Regeln

Implikationselimination: $(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$

Äquivalenzelimination: $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Absorbtionsregel: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Doppelnegation: $\neg\neg A \equiv A$

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$