

Aussagenlogik

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

- 1 Aussagen
- 2 Junktoren
 - Negation
 - Konjunktion
 - Disjunktion
 - Implikation
 - Äquivalenz
 - Klammerung
- 3 Tautologie, Widerspruch, Äquivalenz
- 4 Wichtige Regeln

Aussagen

Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert *wahr* (kurz *w* bzw. 1) oder *falsch* (kurz *f* bzw. 0) zuordnen lässt.

Beispiele:

- Die Kuh ist lila..

Gegenbeispiele:

- "Ist Wasser grün?"

Abkürzung von Aussagen häufig durch Buchstaben:

$$\underbrace{\text{„Die Kuh ist lila.“}}_{=: A}$$

Junktoren

- Verknüpfung logischer Aussagen zu komplexeren Aussagen
- Wahrheitswerte werden abhängig von Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen definiert

Beispiele:

- Die Kuh ist *nicht* lila.
- Die Kuh ist lila *oder* die Kuh ist *nicht* lila.
- Wenn das Gras grün ist, dann ist die Kuh lila.

Negation

Definition (Negation)

Die **Negation** der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder \overline{A} . Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Negation

Definition (Negation)

Die **Negation** der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder \bar{A} . Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Darstellung als Wahrheitstafel:

A		$\neg A$
f		w
w		f

Konjunktion

Definition (Konjunktion)

Die **Konjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Konjunktion

Definition (Konjunktion)

Die **Konjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Darstellung als Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion

Definition (Disjunktion)

Die **Disjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Disjunktion

Definition (Disjunktion)

Die **Disjunktion** der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Darstellung als Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

Definition (Implikation)

Die **Implikation** der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Implikation

Definition (Implikation)

Die **Implikation** der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Darstellung als Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Äquivalent

Definition (Äquivalenz)

Die **Äquivalenz** (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Äquivalent

Definition (Äquivalenz)

Die **Äquivalenz** (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Darstellung als Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Klammerung

- Verknüpfung Junktoren enthaltenden Aussagen möglich
- Problem:

Welchen Wahrheitswert hat $A \vee B \wedge C$?

- Einführung einer Klammerung zur Priorisierung
- Zur Vereinfachung haben die logischen Verknüpfungen hier folgende (absteigende) Priorität

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Achtung: Diese Priorisierung wird nicht immer vereinbart!

Tautologie, Widerspruch, Äquivalenz

Definition (Tautologie)

Eine Aussage, welche stets wahr ist, nennen wir **Tautologie**.

Definition (Widerspruch)

Eine Aussage, welche stets falsch ist, nennen wir **Widerspruch**.

Definition (Äquivalenz)

Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent**, geschrieben $A \equiv B$, falls sie stets den selben Wahrheitswert besitzen.

Wichtige Regeln

Kommutativgesetz: $A \wedge B \equiv B \wedge A$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Assoziativgesetz: $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

Distributivgesetz: $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Regel von de Morgan: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Wichtige Regeln

Implikationselimination: $(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$

Äquivalenzelimination: $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Absorbtionsregel: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Doppelnegation: $\neg\neg A \equiv A$

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$