Arithmetik

Malte Grave

Fachschaft Informatik

September 29, 2020

Outline

Grundlegende Regeln - Addition

Satz (Grundrechenregeln für Addition)

Für die Addition von $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \textit{Kommutativgesetz:} &\quad a + b = b + a \\ \textit{Assoziativgesetz:} &\quad (a + b) + c = a + (b + c) \\ \textit{Neutrales Element:} &\quad a + 0 = a \\ \textit{Inverses Element:} &\quad a + (-a) = 0 \\ \textit{Distributivgesetz:} &\quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Grundlegende Regeln - Multiplikation

Satz (Grundrechenregeln für Multiplikation)

Für die Multiplikation von $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

Kommutativgesetze:	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze:	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Neutrale Elemente:	$a \cdot 1 = a$
Inverse Elemente:	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Distributivgesetz:	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Regeln über Vergleiche

Satz (Regeln über Vergleiche)

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

$$
\begin{aligned}
\textit{Transitivität:} \quad & a < b \land b < c \implies a < c \\
\textit{Monotonie bzgl. Addition:} \quad & a < b \iff a + c < b + c \\
\textit{Monotonie bzgl. Multiplikation:} \quad & a < b \land c > 0 \implies ac < bc \\
& a < b \land c < 0 \implies ac > bc \\
\textit{weitere Eigenschaften:} \quad & a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \land b > 0) \lor (a < 0 \land b < 0) \\
& a \cdot b < 0 \iff (a > 0 \land b < 0) \lor (a < 0 \land b > 0) \\
& a \cdot b = 0 \iff a = 0 \lor b = 0
\end{aligned}
$$

Definition (Bruch)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir, um a durch b zu teilen

$$\frac{a}{b}$$

Dabei ist a der **Zähler** und b der **Nenner**.
Das Inverse eines Bruches wird als **Kehrwert** bezeichnet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Grundrechenregeln für Brüche

Lemma (Grundrechenregeln für Brüche)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\textit{Erweitern bzw. Kürzen:} \quad & \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \\
\textit{Addition:} \quad & \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \\
\textit{Multiplikation:} \quad & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\
\textit{Division:} \quad & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

Verkürzende Schreibweise

Definition (Summen- und Produktzeichen)

Seien $k,\ n \in \mathbb{N}$. Mit dem Summenzeichen $\sum$ (gr. Sigma) lassen sich Summen und mit dem Produktzeichen $\prod$ (gr. Pi) lassen sich Produkte wie folgt notieren:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n \qquad \prod_{i=k}^{n} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Hierbei ist i die Laufvariable, k die untere Grenze, n die obere Grenze und a_i ein Term in Abhängigkeit von i. Die Variable i nimmt alle natürlichen Werte von k bis n an.
(„Summe / Produkt von $i = k$ bis n über a_i.“)
Falls $k > n$ gilt, ist der Wert das neutrale Element, also 0 bei der Summe und 1 beim Produkt.

Alternativ kann die Laufvariable auch über eine Menge definiert werden:

$$\sum_{i \in \{k,\ldots,n\}} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n \qquad \prod_{i \in \{k,\ldots,n\}} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Indextransformation

- Veränderung des Wertebereichs der Laufvariablen
- Anpassung der Terme(so dass der Gesamtausdruck gleich bleibt)
- Beispiel:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n = \sum_{i=k+x}^{n+x} a_{i-x}$$

Elemente aus Summen und Produkten ziehen

- Veränderung der Grenzen des Laufindex
- Herausziehen einzelner Elemente aus Summe/Produkt
- Beispiele:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + ... + a_{n-1} + a_n = \left(\sum_{i=k}^{n-1} a_i \right) + a_n$$

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n = \left(\prod_{i=k}^{n-1} a_i \right) \cdot a_n$$

Fakultät

Definition (Fakultät)

Die Fakultät ! beschreibt das Produkt der Faktoren 1 bis zu der angegebenen natürlichen Zahl n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Beachte, dass damit $0! = 1$ gilt.

Potenz

Definition (Potenz)

Sei $b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ b \neq 0 \vee n \neq 0$. Dann definieren wir:

$$b^n := \prod_{i=1}^{n} b \qquad \text{und} \qquad b^{-n} := \frac{1}{b^n} \quad \text{für } b \neq 0$$

Für die **Potenz** b^n ist b die **Basis** und n der **Exponent**.
(„b hoch n “)

Wurzel

Definition (Wurzel)

Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann definieren wir die (positive) n-te Wurzel aus a als die einzige *nichtnegative* Lösung x der Gleichung

$$x^n = a$$

und schreiben

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = x.$$

Hierbei wird a als **Radikant** und n als **Wurzelexponent** bezeichnet.
Wird kein Wurzelexponent angegeben wird, handelt es sich um eine **Quadratwurzel** (mit $n = 2$).

Potenzgesetze

Lemma (Potenzgesetze)

Seien $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ *mit* $a, b > 0$.

$$
\begin{aligned}
a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\
\frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\
(a^r)^s &= a^{r \cdot s} \\
a^r \cdot b^r &= (a \cdot b)^r \\
\frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r
\end{aligned}
$$

Definition (Logarithmus)

Sei $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $y \in \mathbb{R}_+$. Dann definieren wir:

$$x = \log_b(y) :\Leftrightarrow b^x = y$$

(„Logarithmus von y zur Basis b. “)

Betrag

Definition (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ wird der Betrag $|x|$ („Betrag von x “) wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$