

Arithmetik

Moritz Buhr

Fachschaft Informatik

Oktober 2022

Outline

- 1 Grundlegende Regeln
- 2 Bruchrechnung
- 3 Verkürzende Schreibweise
 - Summen- und Produktzeichen
 - Indextransformation
 - Elemente aus Summen und Produkten ziehen
 - Fakultäten
- 4 Wurzeln, Potenzen und Logarithmen
- 5 Betrag

Grundlegende Regeln - Addition

Satz (Grundrechenregeln für Addition)

Für die Addition von $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Neutrales Element: $a + 0 = a$

Inverses Element: $a + (-a) = 0$

Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Grundlegende Regeln - Multiplikation

Satz (Grundrechenregeln für Multiplikation)

Für die Multiplikation von $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Neutrale Elemente: $a \cdot 1 = a$

Inverse Elemente: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Regeln über Vergleiche

Satz (Regeln über Vergleiche)

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

$$\text{Transitivität: } a < b \wedge b < c \implies a < c$$

$$\text{Monotonie bzgl. Addition: } a < b \iff a + c < b + c$$

$$\text{Monotonie bzgl. Multiplikation: } a < b \wedge c > 0 \implies ac < bc$$

$$a < b \wedge c < 0 \implies ac > bc$$

$$\text{weitere Eigenschaften: } a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$a \cdot b < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

Bruchrechnung

Definition (Bruch)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir, um a durch b zu teilen

$$\frac{a}{b}$$

Dabei ist a der **Zähler** und b der **Nenner**.

Das Inverse eines Bruches wird als **Kehrwert** bezeichnet:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Grundrechenregeln für Brüche

Lemma (Grundrechenregeln für Brüche)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Erweitern bzw. Kürzen:} & \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \\ \text{Addition:} & \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \\ \text{Multiplikation:} & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\ \text{Division:} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \end{array}$$

Verkürzende Schreibweise

Definition (Summen- und Produktzeichen)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Mit dem Summenzeichen \sum (gr. Sigma) lassen sich Summen und mit dem Produktzeichen \prod (gr. Pi) lassen sich Produkte wie folgt notieren:

$$\sum_{i=k}^n a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \qquad \prod_{i=k}^n a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n$$

Hierbei ist i die Laufvariable, k die untere Grenze, n die obere Grenze und a_i ein Term in Abhängigkeit von i . Die Variable i nimmt alle natürlichen Werte von k bis n an.

(„Summe / Produkt von $i = k$ bis n über a_i .“)

Falls $k > n$ gilt, ist der Wert das neutrale Element, also 0 bei der Summe und 1 beim Produkt.

Alternativ kann die Laufvariable auch über eine Menge definiert werden:

$$\sum_{i \in \{k, \dots, n\}} a_i := a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n \qquad \prod_{i \in \{k, \dots, n\}} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n$$

Indextransformation

- Veränderung des Wertebereichs der Laufvariablen
- Anpassung der Terme (so dass der Gesamtausdruck gleich bleibt)
- Beispiel:

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n = \sum_{i=k+x}^{n+x} a_{i-x}$$

Elemente aus Summen und Produkten ziehen

- Veränderung der Grenzen des Laufindex
- Herausziehen einzelner Elemente aus Summe/Produkt
- Beispiele:

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = \left(\sum_{i=k}^{n-1} a_i \right) + a_n$$

$$\prod_{i=k}^n a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = \left(\prod_{i=k}^{n-1} a_i \right) \cdot a_n$$

Fakultät

Definition (Fakultät)

Die Fakultät ! beschreibt das Produkt der Faktoren 1 bis zu der angegebenen natürlichen Zahl n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Beachte, dass damit $0! = 1$ gilt.

Potenz

Definition (Potenz)

Sei $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0 \vee n \neq 0$. Dann definieren wir:

$$b^n := \prod_{i=1}^n b \quad \text{und} \quad b^{-n} := \frac{1}{b^n} \quad \text{für } b \neq 0$$

Für die **Potenz** b^n ist b die **Basis** und n der **Exponent**.
(„ b hoch n “)

Wurzel

Definition (Wurzel)

Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann definieren wir die (positive) n -te Wurzel aus a als die einzige *nichtnegative* Lösung x der Gleichung

$$x^n = a$$

und schreiben

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = x.$$

Hierbei wird a als **Radikant** und n als **Wurzelexponent** bezeichnet.

Wird kein Wurzelexponent angegeben wird, handelt es sich um eine **Quadratwurzel** (mit $n = 2$).

Potenzgesetze

Lemma (Potenzgesetze)

Seien $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Logarithmus

Definition (Logarithmus)

Sei $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $y \in \mathbb{R}_+$. Dann definieren wir:

$$x = \log_b(y) :\Leftrightarrow b^x = y$$

(„Logarithmus von y zur Basis b . “)

Betrag

Definition (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ wird der **Betrag** $|x|$ („Betrag von x “) wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$