Lösungen zu Übungszettel 1 – Aussagenlogik

1.1 Gegeben seien die Aussagen B, R, T.

$B :=$ „Das Buch ist ein Bestseller."
$R :=$ „Das Buch ist ein Roman."
$T :=$ „Das Buch ist teurer als 20 €."

(a) Überführen Sie folgende Aussagen in Aussagenlogik:

(i) „Das Buch ist ein Bestseller und nicht teurer als 20 €."

Lösung: $B \wedge \neg T$

(ii) „Das Buch ist ein Bestseller, aber es ist teurer als 20 €."

Lösung: $B \wedge T$

(b) Verbalisieren Sie die folgenden Aussagenverknüpfungen:

(i) $T \vee \neg B$

Lösung: „Das Buch ist teurer als 20 €oder das Buch ist kein Bestseller."

(ii) $B \Rightarrow \neg R$

Lösung: „Wenn das Buch ein Bestseller ist, dann ist es kein Roman."

1.2 Beweise mit Wahrheitstafeln:

(a) Beweisen Sie die Gültigkeit der Absorptions-Regel $A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

Lösung:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

(b) Zeigen Sie, dass $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ falsch ist.

Lösung:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

(c) Ist $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ein Widerspruch? Ist die Aussage eine Tautologie?

Lösung: Es handelt sich nicht um einen Widerspruch sondern um eine Tautologie:

A	B	C	$B \Rightarrow C =: D$	$A \Rightarrow D =: E$	$A \Rightarrow B =: F$	$A \Rightarrow C =: G$	$F \Rightarrow G =: H$	$E \Leftrightarrow H$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

1.3 Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Lösung: Beweis der Kontraposition:

$$
\begin{aligned}
& A \Rightarrow B && \mid \text{Implikationselimination} \\
\equiv\ & \neg A \vee B && \mid \text{Kommutativgesetz} \\
\equiv\ & B \vee \neg A && \mid \text{Doppelnegation} \\
\equiv\ & \neg\neg B \vee \neg A && \mid \text{Implikationsumformung} \\
\equiv\ & \neg B \rightarrow \neg A &&
\end{aligned}
$$

1.4 Beweisen Sie durch Umformen oder mit Wahrheitstafeln: $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Lösung:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

1.5 Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow (A \wedge (A \vee B)))$

Lösung:

$A \Leftrightarrow B$	| Äquivalenzelimination
$\equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	| Implikationselimination
$\equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \Rightarrow A)$	| De Morgan
$\equiv \neg(\neg\neg A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A)$	| Doppelnegation
$\equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A)$	| Absorbtionsregel
$\equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A \wedge (A \vee B))$	

Lösungen zu Übungszettel 2 – Mengenlehre

2.1 (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.

(i) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
(ii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
(iii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$

(b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.

(i) $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ ungerade}\}$
(ii) $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
(iii) $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

2.2 Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:

(a) Es existiert ein x in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.

> **Lösung:** $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$

(b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.

> **Lösung:** $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

2.3 Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\text{Mo}, \text{Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a)	$\text{Mo} \in \Omega$	falsch	(b)	$\{\text{Mo}, \text{Di}\} \subset \Omega$	falsch	(c)	$\{5\} \in \Omega$	falsch
(d)	$\{5\} \subset \Omega$	richtig	(e)	$\{\text{Mo}\} \subset \Omega$	falsch	(f)	$\emptyset \subset \Omega$	richtig
(g)	$\{\emptyset\} \subset \Omega$	richtig	(h)	$\emptyset \in \Omega$	richtig	(i)	$\{\emptyset\} \in \Omega$	falsch

2.4 Welche der Mengen $A_1, \ldots, A_6$ ist identisch mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_6$ (und mit welcher)?

$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \cdot x = 4\}$	$B_1 = \{-2, 2\}$
$A_2 = \{\}$	$B_2 = \{0\}$
$A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 1\}$	$B_3 = \{2\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \cdot x = 4\}$	$B_4 = \{0, 2\}$
$A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + x = 0\}$	$B_5 = \{-2, 0, 2\}$
$A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N},\ -1 < x \leq 2\}$	$B_6 = \emptyset$

> **Lösung:** $A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$

2.5 Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.

(a) Geben Sie folgende Mengen an:

$$A \cup B = \Omega$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap \overline{B} = A$$
$$A \cap \overline{C} = \{1,\ 3\}$$
$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\} \ = \ \{5,\ 7,\ 9\}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die

(i) in genau einer	(ii) in genau zwei	(iii) in höchstens zwei
$M := \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$	$\Omega \backslash M$	Ω

der Mengen A, B und C liegen.

(c) Wie muss die Grundmenge Ω sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?

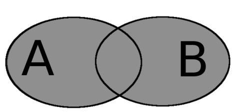
Lösung: $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

2.6 Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?

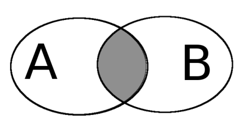
Lösung: Teilmengen:
{1}, {2}, {3}, {4},
{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4},
{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4},
{ }, {1, 2, 3, 4}.
Es gibt $2^4 \ = \ 16$ Teilmengen.

2.7 Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

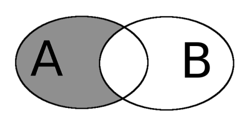
$A \cup B:$



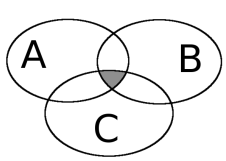
$A \cap B:$



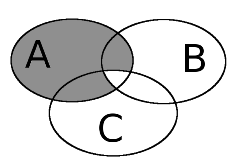
$A \cap \overline{B}:$



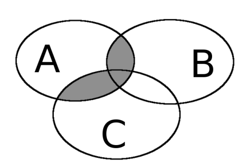
$A \cap B \cap C:$



$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}):$



$A \cap (B \cup C):$



Lösungen zu Übungszettel 3 – Arithmetik

3.1 (a) Stellen Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar:

(i) $6+9+12+15+18+21=\sum_{i=2}^{7}3i$

(ii) $16+8a+4a^2+2a^3+a^4=\sum_{i=0}^{4}2^{4-i}a^i$

(iii) Verschieben Sie den Summenindex in Aufgabenteil (i) um 1 nach oben. Wie muss die Summe in Summenzeichenschreibweise dann notiert werden? $\sum_{i=3}^{8}3(i-1)$

(b) Stellen Sie die Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar:

(i) $1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11=\prod_{i=0}^{5}(1+2i)$

(ii) $\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{17}\cdot\frac{15}{26}=\prod_{i=1}^{5}\frac{3i}{i^2+1}$

3.2 Erinnere dich daran, wie man den letzten Summanden aus einer Summe zieht. Führe dies für folgende Summen durch:

(a) $\sum_{i=0}^{n+1}(i+1)^2 \;=\; \sum_{i=0}^{n}(i+1)^2 \;+\; (n+2)^2$

(b) $\sum_{s=0}^{n}(s+1) \;=\; \sum_{s=0}^{n-1}(s+1) \;+\; n+1$

(c) $\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{i-1}{i}+1\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{i}+1\right) \;+\; \frac{n}{n+1}+1$

3.3 (a) Multiplizieren Sie aus, und fassen Sie, falls möglich, zusammen.

(i) $5(x+y+z)-7(x-y+z)-8(x+y-z)$
$=5x+5y+5z-7x+7y-7z-8x-8y+8z$
$=-10x+4y+6z$
$=2(-5x+2y+3z)$

(ii) $69p+(13q-(17p+11q))-(11p-(13p-17q))$
$=69p+13q-17p-11q-11p+13p-17q$
$=54p-15q$
$=3(18p-5q)$

(b) Klammern Sie möglichst weit aus:

(i) $ax+bx+ay+by$
$=x(a+b)+y(a+b)$
$=(x+y)(a+b)$

(ii) $(a-b)\cdot(2x-3y)-(a-b)\cdot(x-3y)$
$=2ax-3ay-2bx+3by-ax+3ay+bx-3by$
$=ax-bx=(a-b)x$

3.4 (a) Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Hauptnenner, und vereinfachen Sie, falls möglich.

(i) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{x^2y}+\frac{6}{y^2}=\frac{xy^2-x^2y+2y+6x^2}{x^2y^2}$

(ii) $1 - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{x-y-1}{x-y}$

(iii) $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \dfrac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{2y}{x^2-y^2}$

3.5 (a) Fassen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen:

(i) $(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1}) = (-a^{-1})^3 = -a^{-3}$

(ii) $b(ba^0)(a^0b)(a^0b)(b^1) = b^2(a^0b)^3 = b^2a^0b^3 = b^5$

3.6 (a) Unter welchen Bedingungen können folgende Zahlen Radikand einer Quadratwurzel sein? Geben Sie konkrete Definitionen für den Wert a an (z.B. $a \in \mathbb{N}, \dots$).

$$+a,\ -a,\ -a^2,\ +a^3,\ -a^3,\ +(a-b),\ -(a-b)$$

Lösung:

(i) Für $+a$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(ii) Für $-a$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

(iii) Für $-a^2$: $-a^2$ kann nur für $a = 0$ Radikand einer Quadratwurzel sein

(iv) Für $+a^3$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(v) Für $-a^3$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

(vi) Für $+(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \geq b)$

(vii) Für $-(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \leq b)$

(b) Addieren Sie:

(i) $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75} = 6\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} - 7\sqrt{25 \cdot 3} = -5\sqrt{3}$

Lösungen zu Übungszettel 4 – Gleichungen

4.1 (a) Multiplizieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln aus:

(i) $(2-6b)(2+6b) \;=\; -36b^2+4$

(ii) $(2+4b)^2 \;=\; 16b^2+16b+4$

(iii) $(-2a^2+13d)^2 \;=\; 4a^4-52a^2d+169d^2$

(b) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Produkt von Summen bzw. Differenzen.

(i) $49a^2+42ay+9y^2 \;=\; (7a+3y)^2$

(ii) $16a^2-72acy+81c^2y^2 \;=\; (4a-9cy)^2$

(iii) $9d^2-81g^2 \;=\; (3d+9g)(3d-9g)$

4.2 Ergänzen Sie die fehlenden Summanden:

(a) $(d-\underline{6g})^2 = \underline{d^2} - 12dg + 36g^2$

(b) $(3a+\underline{4c})^2 = 9a^2 + \underline{24ac} + 16c^2$

(c) $(\underline{a}+5)^2 = \underline{a^2} + 10a + 25$

(d) $(\underline{7d}-\underline{9e})^2 = 49d^2 - \underline{126de} + 81e^2$

(e) $(d-\underline{3e})^2 = d^2 - 6de + \underline{9e^2}$

(f) $(\underline{-x}-3x^2)^2 = \underline{x^2} + 6x^3 + \underline{9x^4}$

4.3 Geben sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen an.

(a) $x^2-4x=0, \qquad x\in\{0,4\}$

(b) $2x^3-5x^2=0, \qquad x\in\{0,\frac{5}{2}\}$

(c) $x^2+2x-3=0, \qquad x\in\{-3,1\}$

(d) $4x^2-4x+1=0, \qquad x\in\{\frac{1}{2}\}$

(e) $x^2+4x+5=0, \qquad x\in\emptyset$

(f) $x^3-x^2-4x+4=0, \qquad x\in\{-2,1,2\}$ (Polynomdivision zeigen)

(g) $2x^3+8x^2+10x+4=0, \qquad x\in\{-1,-2\}$ (Polynomdivision zeigen)

(h) $x^3-3x^2-4x+12=0, \qquad x\in\{-2,2,3\}$ (Polynomdivision zeigen)

4.4 (a) Geben Sie jeweils eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2+bx+c=0$ an, die die folgenden Lösungen besitzt:

(i) $x_1=4,\ x_2=5 \;\Leftrightarrow\; x^2-9x+20=0$

(ii) $x_1=2+\sqrt{2},\ x_2=2-\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; x^2-4x+2=0$

(iii) $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2-\frac{1}{2}x=0$

(iv) $x_1=x_2=-1 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x+1=0$

(b) Stellen Sie folgende Ausdrücke als Produkt der Form $(x-a)(x-b)$ dar:

(i) $x^2-5x+6 \;=\; (x-2)(x-3)$

(ii) $x^2-x-20 \;=\; (x+4)(x-5)$

(iii) $x^2-18x+9 \;=\; (x-(9+\sqrt{72}))(x-(9-\sqrt{72})) = (x-(9+6\sqrt{2}))(x-(9-6\sqrt{2}))$

(iv) $x^2-16 \;=\; (x+4)(x-4)$

Lösungen zu Übungszettel 5 – Beweismethoden

5.1 (a) Beweisen Sie direkt: $n^2 + n$ ist für beliebige natürliche Zahl n gerade.

> **Lösung: Beweis (direkt):** Mit Fallunterscheidung:
>
> **1. Fall:** n gerade, also $n = 2k$ (wobei $k \in \mathbb{N}$)
> Damit: $n^2 + n \;=\; (2k)^2 + 2k \;=\; 2(2k^2 + k)$
> Da $(2k^2 + k) \;\in \mathbb{N}$, ist $2(2k^2 + k)$ gerade.
>
> **2. Fall:** n ungerade, also $n = 2k + 1$ (wobei $k \in \mathbb{N}$)
> Damit: $n^2 + n \;=\; (2k + 1)^2 + 2k + 1 \;=\; 2(2k^2 + 3k + 1)$
> Da $(2k^2 + 3k + 1) \;\in \mathbb{N}$, ist $2(2k^2 + 3k + 1)$ gerade. $\square$

(b) Beweisen Sie durch Kontraposition: Ist für zwei natürliche Zahlen m und n das Produkt $m \cdot n$ gerade, dann ist m gerade oder n gerade.

> **Lösung: Beweis (durch Kontraposition):** Zu Zeigen ist $\neg B \Rightarrow \neg A$, also:
> $\neg(m$ gerade $\vee\, n$ gerade $) \Rightarrow \neg(m \cdot n$ gerade $)$
> $\Leftrightarrow m$ ungerade $\wedge\, n$ ungerade $\Rightarrow m \cdot n$ ungerade
> Damit: m ungerade: $m = 2k + 1$, n ungerade: $n = 2l + 1$
> Es folgt: $m \cdot n = (2k + 1) \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2 \cdot (2kl + k + l) + 1$
> Da $2 \cdot (2kl + k + l)$ durch 2 teilbar, also gerade ist $2 \cdot (2kl + k + l) + 1$ ungerade. $\square$

(c) Beweisen Sie durch Widerspruchsbeweis: Ist n^2 gerade, so ist n gerade (wobei $n \in \mathbb{N}$).

> **Lösung: Beweis (durch Widerspruch):** Zeige $A \wedge \neg B \rightarrow \bot$:
> Gehe also aus von $\neg B$, also n ungerade.
> Dann ist $n = 2k + 1$ und $n^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1$
> Da $4k^2 + 4k$ gerade, ist $4k^2 + 4k + 1$ ungerade. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel: $3n + 9 \;>\; n^2$ (wobei $n \in \mathbb{N}$)

> **Lösung: Gegenbeispiel:**
> (Die Behauptung gilt nur für $n \leq 4$.)
> Für $n = 5$ gilt $3n + 9 = 3 \cdot 5 + 9 = 24 \leq 25 = n^2$, d. h. die obige Ungleichung wird nicht erfüllt. $\square$

(e) Finden Sie ein Gegenbeispiel: Wenn n gerade, dann ist $n^2 + 2$ durch 3 teilbar. ($n \in \mathbb{N}$)

Lösung: Gegenbeispiel: $n = 6$: $n^2 + 2 = 36 + 2 = 38$.
3 teilt allerdings nicht 38, weswegen die Annahme widerlegt ist.
ODER: $n = 0$: $n^2 + 2 = 0 + 2 = 2$.
3 teilt allerdings nicht 2, weswegen die Annahme widerlegt ist.

5.2 Können Sie die im folgenden gegebenen Aussagen direkt, durch Kontraposition oder durch einen Widerspruchsbeweis beweisen, oder können Sie ein Gegenbeispiel finden? Falls die Aussage beweisbar ist, führen Sie einen Beweis mit beliebiger Methode durch, falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist die natürliche Zahl m ungerade, so ist $m^2 + 7$ durch 8 teilbar.

Lösung: Beweis (direkt): m ungerade, also: $m = 2k + 1$ (wobei $k \in \mathbb{N}$).
Damit: $m^2 + 7 \;=\; (2k+1)^2 + 7 \;=\; 4k^2 + 4k + 1 + 7 \;=\; 4k^2 + 4k + 8$
8 ist durch 8 teilbar, daher betrachte nur noch $4k^2 + 4k$:
$4k^2 + 4k \;=\; 4(k^2 + k)$
Durch 5.1a ist bekannt, dass $(k^2 + k)$ gerade ist, also: $(k^2 + k) = 2 \cdot x$
Damit: $4(k^2 + k) = 4 \cdot 2 \cdot x = 8 \cdot x$ $\square$

(b) **Zusatzaufgabe:** Sei $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösung: Beweis (direkt):

kurze Variante (ohne Fallunterscheidung):

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad | \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Null ist irrelevant und wird daher im Folgenden weggelassen.
Schreibe die Summe untereinander aus (die zweite rückwärts).

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &\quad + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{aligned}$$

Bilde Paare aus den übereinander stehenden Summanden. Jedes Paar hat die Summe

$n+1$:

$$\begin{aligned}
1+n \quad &= n+1\\
2+(n-1) &= n+1\\
3+(n-2) &= n+1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es gibt (wenn die 0 nicht berücksichtigt wird) n Paare, also gilt:

$$\begin{aligned}
2\cdot\sum_{i=0}^{n} i &= n\cdot(n+1) && \mid :2\\
\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} i &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Anmerkung: Wenn 0 mit berücksichtigt wird, gibt es $(n+1)$ Paare die jeweils die Summe n haben.

längere Variante (mit Fallunterscheidung):

Es ist gegeben: $\sum\limits_{i=0}^{n} i = 0+1+2+\ldots+(n-1)+n$.

Die Null ist irrelevant und wird daher im Folgenden weggelassen.

Führe nun eine Fallunterscheidung durch (oder anderer Weg s. u.):

1. Fall: n **gerade:** Die Summe enthält eine gerade Anzahl Summanden. Bilde Paare:

$$\begin{aligned}
1+n \quad &= n+1\\
2+n-1 &= n+1\\
3+n-2 &= n+1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es gibt $\frac{n}{2}$ solcher Paare, also ist $(n+1)\cdot\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ das Ergebnis der Summe.

2. Fall: n **ungerade:** Die Summe enthält eine ungerade Anzahl Summanden. Bilde Paare:

$$\begin{aligned}
1+n \quad &= n+1\\
2+n-1 &= n+1\\
3+n-2 &= n+1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es gibt $\frac{n-1}{2}$ solcher Paare, aber der mittlere Summand $\frac{n+1}{2}$ bleibt alleine. also ist hier $(n+1)\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ das Ergebnis der Summe.

Lösungen zu Übungszettel 6 – Vollständige Induktion

6.1 (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ungeraden Zahlen ist n^2, d.h. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Lösung: Beweis (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1}(2i-1) &= 1^2\\ 2\cdot 1 - 1 &= 1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\text{z. z.:}\quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) \overset{!}{=} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right] + 2(n+1) - 1\\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

6.2 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lösung:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1\cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} &= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 && (1)\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} i^3\right] + (n+1)^3 && (2)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && (3)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} && (4)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} && (5)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1))}{4} && (6)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} && (7)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} && (8)
\end{aligned}$$

6.3 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar

Lösung:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$:

$$\begin{aligned}
&6 \mid (0^3 + 5 * 0) && (9)\\
\Leftrightarrow\ &6 \mid 0 \checkmark && (10)
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 && (11)\\
&= (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6 && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar, der letzte ist offensichtlich durch 6 teilbar.
Uns interessiert jetzt also nur noch, ob $3(n^2+n)$ durch 6 teilbar ist. Auf dem ÜB „Beweismethoden“ haben wir gezeigt, dass n^2+n stets gerade ist. Demnach ist auch $3(n^2+n)$ und damit der gesamte Ausdruck durch 6 teilbar.

Lösungen zu Übungszettel 7 – Lineare Algebra

7.1 Berechne die folgenden Summen:

(a)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 10 \\ -7 & 8 & 11 \\ 26 & 31 & -14 \end{pmatrix}$$

7.2 Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 43 \\ 17 & 31 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 2$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 23 \\ 31 & 22 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 2$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 38 & 13 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 2$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 4 \\ 21 & 9 & 1 \\ 54 & 25 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 3$$

7.3 Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?

> **Lösung:** Es soll auffallen, dass die Addition von Matrizen kommutativ ist, während die Multiplikation nicht kommutativ ist.

7.4 Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Es existiert keine Inverse}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{46} \\ \frac{1}{23} & \frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.5 Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow x = 2,\ y = 7$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow x = 3,\ y = -1,\ z = 2$$

7.6 Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{3} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 6 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 3 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Somit müsste $0x + 0y + 0z = 11$ gelten, aber das funktioniert nicht.
Also hat die Gleichung keine Lösung.

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich die Gleichung:

$$x + 2 \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3 - x}{2}$$

Die Lösungen der Gleichung sind folglich alle Punkte dieser Geraden.
Also hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

7.7 Beweise: Eine beliebige 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

Hinweis: Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.

Lösung: Sei $ad - bc \neq 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $a \neq 0$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \frac{c}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to \frac{a}{ad-bc} \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - b \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) .$$

Folglich ist die Matrix invertierbar und es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Falls $a = 0$ (diese Fallunterscheidung ist notwendig, da sonst oben durch Null geteilt wird), vertausche am Anfang der Umformungen die erste und zweite Zeile und gehe analog vor:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} .$$

Allgemein gilt unabhängig vom Wert für a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Lösungen zu Übungszettel 8 – Abbildungen

8.1 Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2 + x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ g(x) = x + 3$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h(x) = x^3$$

gegeben. Berechne:

(a) $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6^2 + 6 = 42$

(b) $(g \circ h \circ f)(2) = g(h(f(2))) = g(h(6)) = g(216) = 219$

(c) $(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(6) = 216$

(d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + x + 3 = (x+4)(x+3)$

8.2 Untersuche die folgenden Vorschriften. Prüfe dabei, ob es sich um Abbildungen handelt und bestimme in diesem Fall das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind bijektiv?

(a) $f_1 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = 7x^2 + 3$

Lösung: f_1 ist eine Abbildung, Bild von f_1 sind alle reellen Zahlen größer oder gleich 3, f_1 ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) $f_2 : \ \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\}, \ f_2(x) = 2^x$

Lösung: f_2 ist eine Abbildung, da $2^1 = 2, \ 2^4 = 16, 2^6 = 64$ gilt. f_2 ist ferner surjektiv und injektiv, damit also bijektiv und somit ist das Bild von f_2 gerade $\{2, 16, 64\}$

(c) $f_3 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_3(x) = \frac{1}{x}$

Lösung: f_3 ist keine Abbildung, da $f_3(0)$ nicht definiert ist.

(d) $f_4 : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$

Lösung: f_4 ist eine Abbildung, das Bild von f_4 ist $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\}$, denn: $\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{2z+1}{2}} = \dfrac{2z}{2z+1}$. f_4 ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, da die 1 zum Beispiel nicht getroffen wird. f_2 ist aber injektiv, da für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_1 + \frac{1}{2}} = \frac{z_2}{z_2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow z_1(z_2 + \frac{1}{2}) = z_2(z_1 + \frac{1}{2}) \Rightarrow z_1 z_2 + \frac{1}{2} z_1 = z_2 z_1 + \frac{1}{2} z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

(e) $f_5:\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$

> **Lösung:** f_5 ist keine Abbildung, da $f_5(1) \neq f_5(\frac{3}{3})$ gilt.

(f) $f_7:\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

> **Lösung:** f_7 ist eine Abbildung. Sie ist surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{N}:\ \{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, ist aber nicht injektiv, da bspw. $\{1, 2, 3\} und \{2, 3\}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegen. Wegen der Surjektivität ist das Bild von f_7 gerade $\mathbb{N}$.

8.3 Finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f:\ M \to N$, sodass gilt:

(a) Das Bild $f(\{Tabea, Hannes, Malte\})$ ist $\{Mathe\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{Mathe\})$ ist ungleich $\{Tabea, Hannes, Malte\}$.

> **Lösung:** $N := \{Mathe\},\ M := \{Tabea, Hannes, Malte, Stefanie\},\ f(x) = Mathe$

(b) Die Mächtigkeit des Wertebereiches von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.

> **Lösung:** $M := \mathbb{R},\ N := \mathbb{R},\ f(x) = 0$

(c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. Hinweis: Schreibe $x \in \mathbb{Q}$ als $x = \frac{a}{b}$. Eine Abbildungsvorschrift kann dann zum Beispiel mit dem größten gemeinsamen Teiler von a und b bestimmt werden.

> **Lösung:** $M := \mathbb{Q},\ N := \mathbb{Z},\ f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\text{ggt}(a,b)}$. Dies ist wohldefiniert, denn es gilt $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\text{ggt}(a,b)} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \text{ggt}(a,b)} = \frac{na}{\text{ggt}(na,nb)} = f(\frac{na}{nb})$ und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}$ sind genau dann gleich, wenn es $a, b, n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x_1 = \frac{a}{b} = \frac{na}{nb} = x_2$ gilt.