Abbildungen

Moritz Buhr

October 8, 2020

Outline

Abbildungen

Definition (Abbildung)

Seien M und N nicht-leere Mengen. Eine Abbildung f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $f(x) \in N$ zuordnet.
Schreibe: $f: \ M \to N$.
Ist f reellwertig – gilt also $N \subseteq \mathbb{R}$ – so heißt f auch Funktion.

Definition (Definitionsbereich und Wertevorrat)

Sei $f: \ M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt M der Definitionsbereich und N der Wertevorrat von f.

Bild und Urbild

Definition (Bild und Urbild)

Sei $f:\ M \to N$ eine Abbildung.
Für $S \subseteq M$ heißt die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das Bild von S unter f. Für das Bild von M unter f spricht man auch kurz nur vom Bild von f.
Für $L \subseteq N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das Urbild von L unter f.

Komposition

Definition (Komposition)

Seien $f: M \to N$ und $g: S \to M$ Abbildungen. Die Komposition $f \circ g$ von f und g ist die Abbildung

$$f \circ g: S \to N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Injektivität

Definition (Injektivität)

Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ .$$

Werden also zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet, so müssen diese Elemente schon gleich gewesen sein.
Alternative Formulierung:
Für alle $y \in N$ existiert *höchstens* ein $x \in M$, sodass $f(x) = y$ gilt.

Surjektivität

Definition (Surjektivität)

Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt surjektiv, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Das Bild und der Wertevorrat von f müssen also übereinstimmen.
Alternative Formulierung:
Für alle $y \in N$ existiert *mindestens* ein $x \in M$, sodass $f(x) = y$ gilt.

Bijektivität

Definition (Bijektivität)

Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Messen von Unendlichkeiten

Definition (Abzählbarkeit von Mengen)

Eine Menge M heißt höchstens abzählbar, wenn es eine injektive Abbildung f von M nach $\mathbb{N}$ gibt.
Existiert keine solche Abbildung, dann ist M überabzählbar.
Existiert sogar eine bijektive Abbildung g von M nach $\mathbb{N}$, so heißt M abzählbar und es gilt $\#M = \infty$.