Übungszettel 8 – Abbildungen

8.1 Seien

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2 + x \\
g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ g(x) = x + 3 \\
h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h(x) = x^3
\end{aligned}
$$

gegeben. Berechne:

(a) $(f \circ g)(3)$
(b) $(g \circ h \circ f)(2)$
(c) $(h \circ g)(3)$
(d) $(f \circ g)(x)$

8.2 Untersuche die folgenden Vorschriften. Prüfe dabei, ob es sich um Abbildungen handelt und bestimme in diesem Fall das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind bijektiv?

(a) $f_1 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = 7x^2 + 3$
(b) $f_2 : \ \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\}, \ f_2(x) = 2^x$
(c) $f_3 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_3(x) = \frac{1}{x}$
(d) $f_4 : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$
(e) $f_5 : \ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$
(f) $f_7 : \ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \to \mathbb{N}, \ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

8.3 Finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f : \ M \to N$, sodass gilt:

(a) Das Bild $f(\{Tabea, Hannes, Malte\})$ ist $\{Mathe\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{Mathe\})$ ist ungleich $\{Tabea, Hannes, Malte\}$.
(b) Die Mächtigkeit des Wertebereiches von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.
(c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. Hinweis: Schreibe $x \in \mathbb{Q}$ als $x = \frac{a}{b}$. Eine Abbildungsvorschrift kann dann zum Beispiel mit dem größten gemeinsamen Teiler von a und b bestimmt werden.