



# Lösungen zu Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.
  - i.  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$
  - ii.  $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
  - iii.  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$(b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.
  - i.  $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ ungerade}\}$
  - ii.  $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
  - iii.  $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$
2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:
  - (a) Es existiert ein  $x$  in den natürlichen Zahlen womit  $5 + x = 2$  lösbar ist.  
 $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$
  - (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.  
 $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
3. Gegeben sei die Menge  $\Omega = \{5, \{\text{Mo, Di}\}, \emptyset\}$ . Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
  - (a)  $\text{Mo} \in \Omega$  falsch    (b)  $\{\text{Mo, Di}\} \subset \Omega$  falsch    (c)  $\{5\} \in \Omega$  falsch
  - (d)  $\{5\} \subset \Omega$  richtig    (e)  $\{\text{Mo}\} \subset \Omega$  falsch    (f)  $\emptyset \subset \Omega$  richtig
  - (g)  $\{\emptyset\} \subset \Omega$  richtig    (h)  $\emptyset \in \Omega$  richtig    (i)  $\{\emptyset\} \in \Omega$  falsch
4. Welche der Mengen  $A_1, \dots, A_6$  ist identisch mit einer der Mengen  $B_1, \dots, B_6$  (und mit welcher)?

$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \cdot x = 4\}$	$B_1 = \{-2, 2\}$
$A_2 = \{\}$	$B_2 = \{0\}$
$A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\}$	$B_3 = \{2\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \cdot x = 4\}$	$B_4 = \{0, 2\}$
$A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + x = 0\}$	$B_5 = \{-2, 0, 2\}$
$A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x \leq 2\}$	$B_6 = \emptyset$

$A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$
5. Gegeben seien die Mengen  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  und  $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  in der Grundmenge  $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ .
  - (a) Geben Sie folgende Mengen an:
$$A \cup B = \Omega$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap \overline{B} = A$$
$$A \cap \overline{C} = \{1, 3\}$$
$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{5, 7, 9\}$$



- (b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die
- |                       |                      |                         |
|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| (i) in genau einer    | (ii) in genau zwei   | (iii) in höchstens zwei |
| $M := \{1, 2, 3, 4\}$ | $\Omega \setminus M$ | $\Omega$                |
- der Mengen  $A, B$  und  $C$  liegen.

- (c) Wie muss die Grundmenge  $\Omega$  sein, damit gilt  $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$ ?  
 $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Wie viele Teilmengen gibt es?

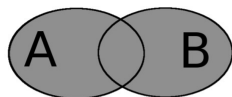
Teilmengen:

$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{4\},$   
 $\{1, 2\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{1, 4\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{2, 4\}, \quad \{3, 4\},$   
 $\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{1, 3, 4\}, \quad \{2, 3, 4\},$   
 $\{ \}, \quad \{1, 2, 3, 4\}.$

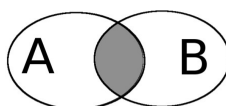
Es gibt  $2^4 = 16$  Teilmengen.

7. Seien  $A, B, C$  Teilmengen einer Grundmenge  $\Omega$ . Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

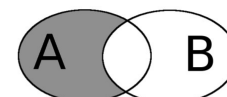
$A \cup B$ :



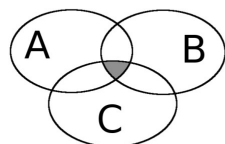
$A \cap B$ :



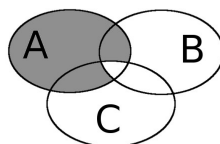
$A \cap \overline{B}$ :



$A \cap B \cap C$ :



$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ :



$A \cap (B \cup C)$ :

