



Lösungen zu Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.
 - i. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$
 - ii. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
 - iii. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$(b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.
 - i. $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ ungerade}\}$
 - ii. $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
 - iii. $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$
2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:
 - (a) Es existiert ein x in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.
 $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$
 - (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.
 $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
3. Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\text{Mo, Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
 - (a) $\text{Mo} \in \Omega$ falsch (b) $\{\text{Mo, Di}\} \subset \Omega$ falsch (c) $\{5\} \in \Omega$ falsch
 - (d) $\{5\} \subset \Omega$ richtig (e) $\{\text{Mo}\} \subset \Omega$ falsch (f) $\emptyset \subset \Omega$ richtig
 - (g) $\{\emptyset\} \subset \Omega$ richtig (h) $\emptyset \in \Omega$ richtig (i) $\{\emptyset\} \in \Omega$ falsch
4. Welche der Mengen A_1, \dots, A_6 ist identisch mit einer der Mengen B_1, \dots, B_6 (und mit welcher)?

$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \cdot x = 4\}$	$B_1 = \{-2, 2\}$
$A_2 = \{\}$	$B_2 = \{0\}$
$A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\}$	$B_3 = \{2\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \cdot x = 4\}$	$B_4 = \{0, 2\}$
$A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + x = 0\}$	$B_5 = \{-2, 0, 2\}$
$A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x \leq 2\}$	$B_6 = \emptyset$

$A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$
5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.
 - (a) Geben Sie folgende Mengen an:
$$A \cup B = \Omega$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap \overline{B} = A$$
$$A \cap \overline{C} = \{1, 3\}$$
$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{5, 7, 9\}$$



- (b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die
- | | | |
|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| (i) in genau einer | (ii) in genau zwei | (iii) in höchstens zwei |
| $M := \{1, 2, 3, 4\}$ | $\Omega \setminus M$ | Ω |
- der Mengen A, B und C liegen.

- (c) Wie muss die Grundmenge Ω sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?
 $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?

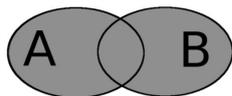
Teilmengen:

$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{4\},$
 $\{1, 2\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{1, 4\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{2, 4\}, \quad \{3, 4\},$
 $\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{1, 3, 4\}, \quad \{2, 3, 4\},$
 $\{ \}, \quad \{1, 2, 3, 4\}.$

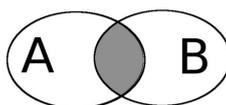
Es gibt $2^4 = 16$ Teilmengen.

7. Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω . Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

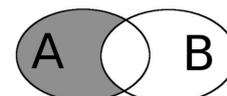
$A \cup B$:



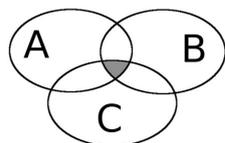
$A \cap B$:



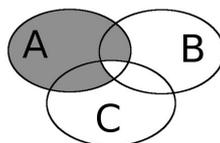
$A \cap \overline{B}$:



$A \cap B \cap C$:



$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$:



$A \cap (B \cup C)$:

