Carl von Ossietzky
Universität
Oldenburg

Grundlagen der Linearen Algebra

Jannik Baar, Oktober 04, 2024

Outline

Grundlagen der Matrizenrechnung

Definition 7.1: Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine $m \times n$-Matrix A ist formal eine rechteckige Anordnung von Objekten in tabellarischer Form. Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet. Diese Einträge können Zahlen oder auch andere Objekte (Polynome, Funktionen, etc.) sein.

Matrizenaddition

Definition 7.2: Matrizenaddition

Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für $m \times n$-Matrizen A und B definiere die Summe als $m \times n$-Matrix

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Definition 7.3: Matrizenmultiplikation

Seien $m, n, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times l$-Matrix. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist eine $m \times l$-Matrix und definiert als

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1l} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Einheitsmatrix

Definition 7.4: Einheitsmatrix

Eine quadratische Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ sind, nennt man Einheitsmatrix. Eine solche Matrix hat also auf der Hauptdiagonalen Einsen und ansonsten Nullen. Einheitsmatrizen werden meist durch E, E_n oder I_n (für "‘identity"’) abgekürzt, wobei n der Anzahl an Zeilen beziehungsweise Spalten entspricht.

Inverse Matrix

Definition 7.5: Inverse Matrix

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$.
Eine Matrix $A \in M^{n \times n}$ heißt invertierbar in $M^{n \times n}$, falls es eine Matrix $B \in M^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n = B \cdot A$. Die Matrix B nennen wir dann die inverse Matrix oder auch die Inverse von A, geschrieben A^{-1}.

Satz 7.6: Invertierbarkeit einer Matrix

Falls eine Matrix A invertierbar ist, so ist ihre inverse Matrix eindeutig, d.h. es gibt genau eine Matrix A^{-1}, sodass $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Bestimmung der inversen Matrix

Satz 7.7: Gauß-Jordan-Algorithmus

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und M eine Menge mit $0 \in M$ und $1 \in M$. Sei weiter $A \in M^{n \times n}$. Formt man A mit den folgenden Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix E_n um und wendet man die gleichen Zeilenumformungen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix an, so erhält man die inverse Matrix von A.
Die Zeilenumformungen sind

- Multiplikation der i-ten Zeile einer Matrix mit einem invertierbaren Skalar $\lambda \in M$ $(1 \leq i \leq n)$
- Addition des λ-fachen der k-ten Zeile einer Matrix zur i-ten Zeile $(1 \leq k, i \leq n$, $k \neq i$, $\lambda \in M)$
- Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile einer Matrix $(1 \leq i, k \leq n)$.