Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Gleichungen

Maik Rohlfs, September 11, 2024

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Outline

Lineare Gleichungen

Definition 6.1: Lineare Gleichung

Eine lineare Gleichung (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax + b = 0$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**.
Die Unbekannte taucht in der lineare Gleichung nur in erster Potenz ($x = x^1$) auf.

Quadratische Gleichungen

Definition 6.2: Quadratische Gleichung

Eine quadratische Gleichung (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hierbei sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten (mit $a \neq 0$) und x die Variable oder **Unbekannte**.

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Linearfaktoren

Satz 6.3: Linearfaktoren einer quadratischen Funktion

Eine quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ mit Nullstellen x_1 und x_2 gilt:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Aus diesen Linearfaktoren können die Nullstellen direkt abgelesen werden.

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Binomische Formeln

Lemma 6.4: Binomische Formeln

Durch Ausmultiplizieren ergeben sich die folgenden drei binomischen Formeln:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(1. bin. Formel)} \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{(2. bin. Formel)} \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(3. bin. Formel)}
\end{aligned}
$$

Der Satz von Viëta

Satz 6.5: Der Satz von Vi”eta

ine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann die Lösungen x_1 und x_2, wenn gilt

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung wird die erste binomische Formel genutzt und danach die Wurzel gezogen, um die Nullstellen zu finden:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q = 0 && \mid -q \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + px = -q && \mid + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 && \mid \text{1. bin. Formel} \\
\Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 && \mid \sqrt{\cdot} \quad \text{(Achtung: Zwei Lösungen)} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} && \mid -\frac{p}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} && (pq\text{-Formel})
\end{aligned}
$$

Polynomgleichungen

Definition 6.6: Polynomgleichung

Eine Polynomgleichung (mit einer Unbekannten) hat die Struktur:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Hierbei sind die a_i die sogenannten **Koeffizienten**, wobei $a_n \neq 0$.
Der Term auf der linken Seite wird als **Polynom** bezeichnet.
Die Zahl n, die den größten Exponenten angibt, wird als **Grad** des Polynoms bezeichnet.

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Polynomdivision

- **Ziel:** Grad einer Polynomgleichung reduzieren, indem man Faktoren herauszieht
- **Gegeben:** Polynomgleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ und eine Nullstelle x_1 der Gleichung
- Bei Division des Polynoms durch $(x - x_1)$ erhält man $\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0$ vom Grad $n - 1$
- Insgesamt also:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x - x_1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$