Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.

   i. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ ii. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$ iii. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\}$

   (b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.

   i. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ii. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ iii. $\{-2, 2\}$

2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:

   (a) Es existiert ein x in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.
   (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.

3. Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

   (a) $\mathrm{Mo} \in \Omega$ (b) $\{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\} \subset \Omega$ (c) $\{5\} \in \Omega$
   (d) $\{5\} \subset \Omega$ (e) $\{\mathrm{Mo}\} \subset \Omega$ (f) $\emptyset \subset \Omega$
   (g) $\{\emptyset\} \subset \Omega$ (h) $\emptyset \in \Omega$ (i) $\{\emptyset\} \in \Omega$

4. Welche der Mengen $A_1, \ldots, A_6$ ist identisch mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_6$ (und mit welcher)?

   $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \cdot x = 4\}$ $B_1 = \{-2, 2\}$
   $A_2 = \{\}$ $B_2 = \{0\}$
   $A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 1\}$ $B_3 = \{2\}$
   $A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \cdot x = 4\}$ $B_4 = \{0, 2\}$
   $A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + x = 0\}$ $B_5 = \{-2, 0, 2\}$
   $A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N},\ -1 < x \leq 2\}$ $B_6 = \emptyset$

5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.

   (a) Geben Sie folgende Mengen an:

   $$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad A \cap \overline{C}, \quad B \cap \overline{B}, \quad A \cap (B \cup C)$$

   (b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die
   (i) in genau einer (ii) in genau zwei (iii) in höchstens zwei
   der Mengen A, B und C liegen.

   (c) Wie muss die Grundmenge Ω sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?

6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?

7. Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

   $$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad A \cap B \cap C, \quad A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}), \quad A \cap (B \cup C).$$