Übungszettel 7 — Grundlagen der Linearen Algebra

1. Berechne die folgenden Summen:

   (a)
   $$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?

4. Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

   (a)
   $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

6. Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7. Beweise: Eine beliebige 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

   Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

   Hinweis: Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.

Übungszettel 8 — Abbildungen

1. Seien

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :&\ f(x) = x^2 + x \\
g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :&\ g(x) = x + 3 \\
h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :&\ h(x) = x^3
\end{aligned}
$$

   gegeben. Berechne:

   (a) $(f \circ g)(3)$
   (b) $(g \circ h \circ f)(2)$
   (c) $(h \circ g)(3)$
   (d) $(f \circ g)(x)$

2. Untersuche die folgenden Vorschriften. Prüfe dabei, ob es sich um Abbildungen handelt und bestimme in diesem Fall das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind bijektiv?

   (a) $f_1 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = 7x^2 + 3$
   (b) $f_2 :\ \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\},\ f_2(x) = 2^x$
   (c) $f_3 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{x}$
   (d) $f_4 :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$
   (e) $f_5 :\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$
   (f) $f_7 :\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

3. Finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f :\ M \to N$, sodass gilt:

   (a) Das Bild $f(\{Tabea, Hannes, Malte\})$ ist $\{Mathe\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{Mathe\})$ ist ungleich $\{Tabea, Hannes, Malte\}$.
   (b) Die Mächtigkeit des Wertebereiches von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.
   (c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. Hinweis: Schreibe $x \in \mathbb{Q}$ als $x = \frac{a}{b}$. Eine Abbildungsvorschrift kann dann zum Beispiel mit dem größten gemeinsamen Teiler von a und b bestimmt werden.