Übungszettel 4 — Beweismethoden

1. (a) Beweisen Sie direkt: $n^2 + n$ ist für beliebige natürliche Zahl n gerade.
   (b) Beweisen Sie durch Kontraposition: Ist für zwei natürliche Zahlen m und n das Produkt $m \cdot n$ gerade, dann ist m gerade oder n gerade.
   (c) Beweisen Sie durch Widerspruchsbeweis: Ist n^2 gerade, so ist n gerade (wobei $n \in \mathbb{N}$).
   (d) Finden Sie ein Gegenbeispiel: $3n + 9 \;>\; n^2$ (wobei $n \in \mathbb{N}$)
   (e) Finden Sie ein Gegenbeispiel: Wenn n gerade, dann ist $n^2 + 2$ durch 3 teilbar. ($n \in \mathbb{N}$)

2. Können Sie die im folgenden gegebenen Aussagen direkt, durch Kontraposition oder durch einen Widerspruchsbeweis beweisen, oder können Sie ein Gegenbeispiel finden? Falls die Aussage beweisbar ist, führen Sie einen Beweis mit beliebiger Methode durch, falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
   (a) Ist die natürliche Zahl m ungerade, so ist $m^2 + 7$ durch 8 teilbar.
   (b) **Zusatzaufgabe:** Sei $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Übungszettel 5 — Vollständige Induktion

1. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
   Die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ungeraden Zahlen ist n^2, d.h. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n^3 + 5n$$

   durch 6 teilbar