Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Beweismethoden

Lasse Heckelmann, October 4, 2023

Übersicht

Grundbegriffe

Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Grundbegriffe
Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen

Grundbegriffe

Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen
Axiom	nicht zu beweisende Grundaussagen einer Theorie

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Grundbegriffe

Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen
Axiom	nicht zu beweisende Grundaussagen einer Theorie
Satz	eine Aussage in einer Theorie, die mithilfe der Axiome oder bereits bewiesenen Sätze bewiesen wurde

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Grundbegriffe
Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen
Axiom	nicht zu beweisende Grundaussagen einer Theorie
Satz	eine Aussage in einer Theorie, die mithilfe der Axiome oder bereits bewiesenen Sätze bewiesen wurde
Lemma	ein technisches Hilfsresultat von untergeordneter Bedeutung (auch "Hilfssatz")

Grundbegriffe

Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen
Axiom	nicht zu beweisende Grundaussagen einer Theorie
Satz	eine Aussage in einer Theorie, die mithilfe der Axiome oder bereits bewiesenen Sätze bewiesen wurde
Lemma	ein technisches Hilfsresultat von untergeordneter Bedeutung (auch "Hilfssatz")
Korollar	ein Satz, der aus einem anderen Satz einfach folgerbar ist

Grundbegriffe
Definition, Satz, Axiom, Korollar, Lemma, Behauptung

Definition	Vergabe von Namen oder Abkürzungen
Axiom	nicht zu beweisende Grundaussagen einer Theorie
Satz	eine Aussage in einer Theorie, die mithilfe der Axiome oder bereits bewiesenen Sätze bewiesen wurde
Lemma	ein technisches Hilfsresultat von untergeordneter Bedeutung (auch "Hilfssatz")
Korollar	ein Satz, der aus einem anderen Satz einfach folgerbar ist
Behauptung	mathematische Aussage deren Gültigkeit (noch) nicht bewiesen ist

Was ist ein Beweis?

Ein Beweis ist eine genaue und lückenlose Begründung einer Aussage.

Allgemeine Struktur bei Beweisen:

Vorraussetzung:	*Es gelte bereits Aussage A.*
Behauptung:	*Aussage B gilt.*
Beweis:	*Zeige, dass $A \Rightarrow B$ gilt. Da Aussage A nach Vorraussetzung wahr ist, muss durch die Implikation dann also auch Aussage B wahr sein.*

Direkter Beweis

- Direkte Herleitung einer Aussage aus einer anderen Aussage

Direkter Beweis

- Direkte Herleitung einer Aussage aus einer anderen Aussage
- *Wenn A gilt, dann gilt auch B*

Direkter Beweis

- Direkte Herleitung einer Aussage aus einer anderen Aussage
- *Wenn A gilt, dann gilt auch B*
- . . . oder in der Syntax der Aussagenlogik:

Direkter Beweis

- Direkte Herleitung einer Aussage aus einer anderen Aussage
- *Wenn A gilt, dann gilt auch B*
- ... oder in der Syntax der Aussagenlogik:
  $A \Rightarrow B$

Direkter Beweis

- Direkte Herleitung einer Aussage aus einer anderen Aussage
- *Wenn A gilt, dann gilt auch B*
- …oder in der Syntax der Aussagenlogik:
  $A \Rightarrow B$
- Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung:

Beweis:

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis:

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

$$\equiv n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$
$$\equiv n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$
$$\equiv 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$
$$\equiv n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$
$$\equiv 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$
$$\equiv 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$$

Direkter Beweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | n + (n+1) + (n+3)$

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Behauptung: Es gilt $3 | n + (n+1) + (n+3)$.

Beweis:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$
$$\equiv n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$
$$\equiv 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$
$$\equiv 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$$
$$\Rightarrow 3 | 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \Rightarrow \text{ Beh.} \square$$

Direkter Beweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: Für Mengen M, N, S gilt: $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

Direkter Beweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: Für Mengen M, N, S gilt: $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

Vorraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Direkter Beweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: Für Mengen M, N, S gilt: $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

Vorraussetzung: Seien M, N, S beliebige Mengen.

Behauptung:

Beweis:

Direkter Beweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: Für Mengen M, N, S gilt: $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

Vorraussetzung: Seien M, N, S beliebige Mengen.

Behauptung: Es gilt $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$.

Beweis:

Direkter Beweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: Für Mengen M, N, S gilt: $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$

Vorraussetzung: Seien M, N, S beliebige Mengen.

Behauptung: Es gilt $M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$.

Beweis: *Siehe Tafel*

Kontraposition

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Kontraposition

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

- $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$

Kontraposition

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

- $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$
- Statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen reicht es also $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen

Kontraposition

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

- $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$
- Statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen reicht es also $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen
- Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
f	f	w	w
f	w	w	w
w	f	f	f
w	w	w	w

Kontrapositionsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall p \in \mathcal{P} : p \text{ ungerade } \Rightarrow p > 2$

Kontrapositionsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall p \in \mathcal{P} : p \text{ ungerade } \Rightarrow p > 2$

Vorraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Kontrapositionsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall p \in \mathcal{P} : p \text{ ungerade } \Rightarrow p > 2$

Vorraussetzung: Sei $p \in \mathcal{P}$ mit $p \leq 2$.

Behauptung:

Beweis:

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Kontrapositionsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall p \in \mathcal{P} : p$ ungerade $\Rightarrow p > 2$

Vorraussetzung: Sei $p \in \mathcal{P}$ mit $p \leq 2$.

Behauptung: p ist nicht ungerade

Beweis:

Kontrapositionsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: $\forall p \in \mathcal{P} : p$ ungerade $\Rightarrow p > 2$

Vorraussetzung: Sei $p \in \mathcal{P}$ mit $p \leq 2$.

Behauptung: p ist nicht ungerade

Beweis: *Siehe Tafel*

Kontrapositionsbeweis

Komplexeres Beispiel

Zeige: Wenn $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar ist, dann auch $\frac{a+b}{a-b}$, also

$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 : \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ unkürzbar

Kontrapositionsbeweis

Komplexeres Beispiel

Zeige: Wenn $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar ist, dann auch $\frac{a+b}{a-b}$, also
$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 : \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ unkürzbar

Vorraussetzung:

Behauptung:

Beweis:

Kontrapositionsbeweis

Komplexeres Beispiel

Zeige: Wenn $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar ist, dann auch $\frac{a+b}{a-b}$, also
$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 : \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ unkürzbar

Vorraussetzung: $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \wedge \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar

Behauptung:

Beweis:

Kontrapositionsbeweis

Komplexeres Beispiel

Zeige: Wenn $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar ist, dann auch $\frac{a+b}{a-b}$, also

$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 : \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ unkürzbar

Vorraussetzung: $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \wedge \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar

Behauptung: $\frac{a}{b}$ unkürzbar

Beweis:

Kontrapositionsbeweis

Komplexeres Beispiel

Zeige: Wenn $\frac{a}{b}$ nicht kürzbar ist, dann auch $\frac{a+b}{a-b}$, also
$\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 : \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ unkürzbar

Vorraussetzung: $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \wedge \frac{a+b}{a-b}$ unkürzbar

Behauptung: $\frac{a}{b}$ unkürzbar

Beweis: *Siehe Tafel*

Widerspruchsbeweis

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \land \neg B \Rightarrow \bot)$$

Widerspruchsbeweis

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow \perp)$$

- $A \wedge \neg B \Rightarrow \perp$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$

Widerspruchsbeweis

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \land \neg B \Rightarrow \bot)$$

- $A \land \neg B \Rightarrow \bot$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$
- Statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen reicht es also $A \land \neg B \Rightarrow \bot$ zu zeigen

Widerspruchsbeweis

- Nutzung der Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \land \neg B \Rightarrow \bot)$$

- $A \land \neg B \Rightarrow \bot$ gilt also gdw. $A \Rightarrow B$
- Statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen reicht es also $A \land \neg B \Rightarrow \bot$ zu zeigen
- Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \land \neg B \Rightarrow \bot$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
w	w	w	w	w

Widerspruchsbeweis – Vorgehen

1. **Annahme:** Vorraussetzung A und Negation der Behauptung $\neg B$ sind beide *wahr*

Widerspruchsbeweis – Vorgehen

1. **Annahme:** Vorraussetzung A und Negation der Behauptung $\neg B$ sind beide *wahr*
2. Leite aus der Vorraussetzung A und der negierten Behauptung $\neg B$ einen Widerspruch her

Widerspruchsbeweis – Vorgehen

1. **Annahme:** Vorraussetzung A <u>und</u> Negation der Behauptung $\neg B$ sind <u>beide</u> *wahr*
2. Leite aus der Vorraussetzung A und der negierten Behauptung $\neg B$ einen Widerspruch her
3. **Schlussfolgerung:** Da die Vorraussetzung wahr ist und unsere Herleitung des Widerspruchs ebenfalls fehlerfrei ist, muss die negation der Behauptung $\neg B$ bereits falsch gewesen sein. Es gilt somit, dass $\neg B$ falsch ist und somit muss B wahr sein

Widerspruchsbeweis – Vorgehen

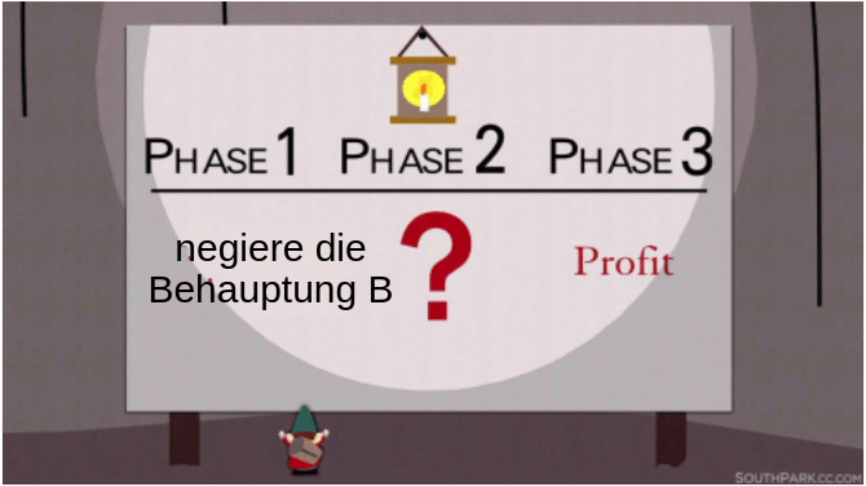
1. **Annahme:** Vorraussetzung A und Negation der Behauptung $\neg B$ sind beide *wahr*
2. Leite aus der Vorraussetzung A und der negierten Behauptung $\neg B$ einen Widerspruch her
3. **Schlussfolgerung:** Da die Vorraussetzung wahr ist und unsere Herleitung des Widerspruchs ebenfalls fehlerfrei ist, muss die negation der Behauptung $\neg B$ bereits falsch gewesen sein. Es gilt somit, dass $\neg B$ falsch ist und somit muss B wahr sein

Widerspruchsbeweis – Vorgehen

1. **Annahme:** Vorraussetzung A und Negation der Behauptung $\neg B$ sind beide *wahr*
2. Leite aus der Vorraussetzung A und der negierten Behauptung $\neg B$ einen Widerspruch her
3. **Schlussfolgerung:** Da die Vorraussetzung wahr ist und unsere Herleitung des Widerspruchs ebenfalls fehlerfrei ist, muss die negation der Behauptung $\neg B$ bereits falsch gewesen sein. Es gilt somit, dass $\neg B$ falsch ist und somit muss B wahr sein

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$$

Widerspruchsbeweis – Bildhaft



Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Vorraussetzung:

Behauptung:

Annahme:

Beweis:

Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Behauptung:

Annahme:

Beweis:

Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\neg \exists k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N} : k \geq l$

Annahme:

Beweis:

Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\neg \exists k \in \mathbb{N} \, \forall l \in \mathbb{N} : k \geq l$

Annahme: $\exists k \in \mathbb{N} \, \forall l \in \mathbb{N} : k \geq l$

Beweis:

Widerspruchsbeweis
Einfaches Beispiel

Zeige: Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Vorraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $\neg \exists k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N} : k \geq l$

Annahme: $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N} : k \geq l$

Beweis: *Siehe Tafel*

Widerspruchsbeweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Widerspruchsbeweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: $\neg \exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Behauptung:

Annahme:

Beweis:

Widerspruchsbeweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Behauptung: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Annahme:

Beweis:

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Widerspruchsbeweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Behauptung: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Annahme: $\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Beweis:

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Widerspruchsbeweis
Komplexeres Beispiel

Zeige: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Behauptung: $\neg\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Annahme: $\exists m, n \in \mathbb{Z} : 28m + 42n = 100$

Beweis: *Siehe Tafel*

Ergänzungen

- Existenzaussagen können durch Angabe eines Elementes bewiesen werden

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Ergänzungen

- Existenzaussagen können durch Angabe eines Elementes bewiesen werden
- Bei Eindeutigkeitsaussagen nimmt man die Existenz von zwei unterschiedlichen Elementen an und zeigt deren Gleichheit

Ergänzungen

- Existenzaussagen können durch Angabe eines Elementes bewiesen werden
- Bei Eindeutigkeitsaussagen nimmt man die Existenz von zwei unterschiedlichen Elementen an und zeigt deren Gleichheit
- Behauptungen, die etwas über alle Elemente aussagen, können durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden

Feedback

- Wir bitten um Feedback!