

Abbildungen

Ben Wegener, September 19, 2023

Outline

Erste Definitionen

Komposition von Abbildungen

Injektivität und Surjektivität
Anwendung - Messen von Unendlichkeit

Abbildungen

Definition 8.1: Abbildung

Seien M und N nicht-leere Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y = f(x) \in N$ zuordnet.

Schreibe: $f : M \rightarrow N$.

Ist f reellwertig – gilt also $N \subseteq \mathbb{R}$ – so heißt f auch **Funktion**.

Definition 8.2: Definitionsbereich und Wertevorrat

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann heißt M der **Definitionsbereich** und N der **Wertevorrat** von f .

Bild und Urbild

Definition 8.3: Bild und Urbild

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

Für $S \subseteq M$ heißt die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das **Bild** von S unter f . Für das Bild von M unter f spricht man auch kurz nur vom Bild von f .

Für $L \subseteq N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das **Urbild** von L unter f .

Komposition

Definition 8.4: Komposition

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : S \rightarrow M$ Abbildungen. Die **Komposition** $f \circ g$ von f und g ist die Abbildung

$$f \circ g : S \rightarrow N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Injektivität

Definition 8.5: Injektivität

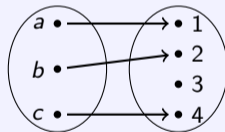
Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Werden also zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet, so müssen diese Elemente schon gleich gewesen sein.

Alternative Formulierung:

Für alle $y \in N$ existiert *höchstens* ein $x \in M$, sodass $f(x) = y$ gilt.



Surjektivität

Definition 8.6: Surjektivität

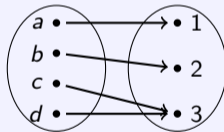
Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Das Bild und der Wertevorrat von f müssen also übereinstimmen.

Alternative Formulierung:

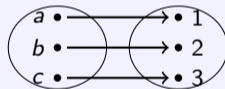
Für alle $y \in N$ existiert *mindestens* ein $x \in M$, sodass $f(x) = y$ gilt.



Bijektivität

Definition 8.7: Bijektivität

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.



Messen von Unendlichkeiten

Definition 8.8: Abzählbarkeit von Mengen

Eine Menge M heißt **höchstens abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung f von M nach \mathbb{N} gibt.

Existiert keine solche Abbildung, dann ist M **überabzählbar**.

Existiert sogar eine bijektive Abbildung g von M nach \mathbb{N} , so heißt M **abzählbar** und es gilt $\#M = \infty$.