



Lösungen zu Übungszettel 3 — Arithmetik

1. (a) Stellen Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar:

i. $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = \sum_{i=2}^7 3i$

ii. $16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4 = \sum_{i=0}^4 2^{4-i}a^i$

iii. Verschieben Sie den Summenindex in Aufgabenteil (i) um 1 nach oben. Wie muss die Summe in Summenzeichenschreibweise dann notiert werden? $\sum_{i=3}^8 3(i-1)$

(b) Stellen Sie die Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar:

i. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = \prod_{i=0}^5 (1 + 2i)$

ii. $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{26} = \prod_{i=1}^5 \frac{3i}{i^2+1}$

2. Erinnere dich daran, wie man den letzten Summanden aus einer Summe zieht. Führe dies für folgende Summen durch:

(a) $\sum_{i=0}^{n+1} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 + (n+2)^2$

(b) $\sum_{s=0}^n (s+1) = \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) + n+1$

(c) $\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{i-1}{i} + 1\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{i} + 1\right) + \frac{n}{n+1} + 1$

3. (a) Multiplizieren Sie aus, und fassen Sie, falls möglich, zusammen.

i.
$$\begin{aligned} &5(x+y+z) - 7(x-y+z) - 8(x+y-z) \\ &= 5x + 5y + 5z - 7x + 7y - 7z - 8x - 8y + 8z \\ &= -10x + 4y + 6z \\ &= 2(-5x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} &69p + (13q - (17p + 11q)) - (11p - (13p - 17q)) \\ &= 69p + 13q - 17p - 11q - 11p + 13p - 17q \\ &= 54p - 15q \\ &= 3(18p - 5q) \end{aligned}$$

(b) Klammern Sie möglichst weit aus:

i.
$$\begin{aligned} &ax + bx + ay + by \\ &= x(a+b) + y(a+b) \\ &= (x+y)(a+b) \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} &(a-b) \cdot (2x-3y) - (a-b) \cdot (x-3y) \\ &= 2ax - 3ay - 2bx + 3by - ax + 3ay + bx - 3by \\ &= ax - bx = (a-b)x \end{aligned}$$

4. (a) Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Hauptnenner, und vereinfachen Sie, falls möglich.



i. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{x^2y} + \frac{6}{y^2} = \frac{xy^2 - x^2y + 2y + 6x^2}{x^2y^2}$

ii. $1 - \frac{1}{x-y} = \frac{x-y-1}{x-y}$

iii. $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y}{x^2 - y^2}$

5. (a) Fassen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen:

i. $(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1}) = (-a^{-1})^3 = -a^{-3}$

ii. $b(ba^0)(a^0b)(a^0b)(b^1) = b^2(a^0b)^3 = b^2a^0b^3 = b^5$

6. (a) Unter welchen Bedingungen können folgende Zahlen Radikand einer Quadratwurzel sein? Geben Sie konkrete Definitionen für den Wert a an (z.B. $a \in \mathbb{N}, \dots$).

$$+a, -a, -a^2, +a^3, -a^3, +(a-b), -(a-b)$$

- i. Für $+a$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
- ii. Für $-a$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$
- iii. Für $-a^2$: $-a^2$ kann nur für $a = 0$ Radikand einer Quadratwurzel sein
- iv. Für $+a^3$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
- v. Für $-a^3$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$
- vi. Für $+(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \geq b)$
- vii. Für $-(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \leq b)$

(b) Addieren Sie:

i. $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75} = 6\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} - 7\sqrt{25 \cdot 3} = -5\sqrt{3}$