Lösungen zu Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.
   i. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
   ii. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
   iii. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$

   (b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.
   i. $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \land x \text{ ungerade}\}$
   ii. $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
   iii. $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:

   (a) Es existiert ein x in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.
   $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$

   (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.
   $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

3. Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a)	$\mathrm{Mo} \in \Omega$	falsch	(b)	$\{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}\} \subset \Omega$	falsch	(c)	$\{5\} \in \Omega$	falsch
(d)	$\{5\} \subset \Omega$	richtig	(e)	$\{\mathrm{Mo}\} \subset \Omega$	falsch	(f)	$\emptyset \subset \Omega$	richtig
(g)	$\{\emptyset\} \subset \Omega$	richtig	(h)	$\emptyset \in \Omega$	richtig	(i)	$\{\emptyset\} \in \Omega$	falsch

4. Welche der Mengen $A_1, \ldots, A_6$ ist identisch mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_6$ (und mit welcher)?

$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \cdot x = 4\}$	$B_1 = \{-2, 2\}$
$A_2 = \{\}$	$B_2 = \{0\}$
$A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 1\}$	$B_3 = \{2\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \cdot x = 4\}$	$B_4 = \{0, 2\}$
$A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + x = 0\}$	$B_5 = \{-2, 0, 2\}$
$A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N},\ -1 < x \leq 2\}$	$B_6 = \emptyset$

   $A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$

5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.

   (a) Geben Sie folgende Mengen an:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad A \cap \overline{C}, \quad B \cap \overline{B}, \quad A \cap (B \cup C)$$

   (b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die

(i)	in genau einer $M := \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$	(ii)	in genau zwei $\Omega \backslash M$	(iii)	in höchstens zwei Ω

   der Mengen A, B und C liegen.

(c) Wie muss die Grundmenge Ω sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?
$\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?
Teilmengen:

{1},	{2},	{3},	{4},		
{1, 2},	{1, 3},	{1, 4},	{2, 3},	{2, 4},	{3, 4},
{1, 2, 3},	{1, 2, 4},	{1, 3, 4},	{2, 3, 4},		
{ },	{1, 2, 3, 4}.				

Es gibt $2^4 = 16$ Teilmengen.

7. Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cap \overline{B}, \quad A \cap B \cap C, \quad A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}), \quad A \cap (B \cup C).$$