# Lösungen zu Übungszettel 2 — Mengenlehre

1. (a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Darstellung an.
   i. $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
   ii. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\} = \{1\}$
   iii. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \{\}$

   (b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Darstellung an.
   i. $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ ungerade}\}$
   ii. $\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x^2 \leq 4\}$
   iii. $\{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

2. Überführen Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise:

   (a) Es existiert ein $x$ in den natürlichen Zahlen womit $5 + x = 2$ lösbar ist.
   $\exists x \in \mathbb{N} : 5 + x = 2$

   (b) Zu jeder natürlichen Zahl existiert eine natürliche Zahl, die grösser ist.
   $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

3. Gegeben sei die Menge $\Omega = \{5, \{\text{Mo}, \text{Di}\}, \emptyset\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $\text{Mo} \in \Omega$ | falsch | (b) | $\{\text{Mo}, \text{Di}\} \subset \Omega$ | falsch | (c) | $\{5\} \in \Omega$ | falsch |
| (d) | $\{5\} \subset \Omega$ | richtig | (e) | $\{\text{Mo}\} \subset \Omega$ | falsch | (f) | $\emptyset \subset \Omega$ | richtig |
| (g) | $\{\emptyset\} \subset \Omega$ | richtig | (h) | $\emptyset \in \Omega$ | richtig | (i) | $\{\emptyset\} \in \Omega$ | falsch |

4. Welche der Mengen $A_1, \ldots, A_6$ ist identisch mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_6$ (und mit welcher)?

| | |
|---|---|
| $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \cdot x = 4\}$ | $B_1 = \{-2, 2\}$ |
| $A_2 = \{\}$ | $B_2 = \{0\}$ |
| $A_3 = \{2x \mid x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 1\}$ | $B_3 = \{2\}$ |
| $A_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \cdot x = 4\}$ | $B_4 = \{0, 2\}$ |
| $A_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x + x = 0\}$ | $B_5 = \{-2, 0, 2\}$ |
| $A_6 = \{2x \mid x \in \mathbb{N},\ -1 < x \leq 2\}$ | $B_6 = \emptyset$ |

$A_1 = B_3, \quad A_2 = B_6, \quad A_3 = B_5, \quad A_4 = B_1, \quad A_5 = B_2, \quad A_6 \neq B_4$

5. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in der Grundmenge $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$.

   (a) Geben Sie folgende Mengen an:

$$A \cup B = \Omega$$
$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cap \overline{B} = A$$
$$A \cap \overline{C} = \{1,\ 3\}$$
$$B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$A \cap (B \cup C) = A \cap \{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\} = \{5,\ 7,\ 9\}$$

(b) Bestimmen Sie die Menge derjenigen Elemente, die

| (i) in genau einer | (ii) in genau zwei | (iii) in höchstens zwei |
|---|---|---|
| $M := \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ | $\Omega \backslash M$ | $\Omega$ |

der Mengen $A$, $B$ und $C$ liegen.

(c) Wie muss die Grundmenge $\Omega$ sein, damit gilt $\overline{A \cup B \cup C} = \{11, 12\}$?
$\Omega = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$

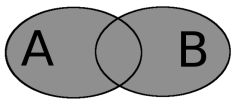
6. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele Teilmengen gibt es?
Teilmengen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{1\}$, | $\{2\}$, | $\{3\}$, | $\{4\}$, | | |
| $\{1, 2\}$, | $\{1, 3\}$, | $\{1, 4\}$, | $\{2, 3\}$, | $\{2, 4\}$, | $\{3, 4\}$, |
| $\{1, 2, 3\}$, | $\{1, 2, 4\}$, | $\{1, 3, 4\}$, | $\{2, 3, 4\}$, | | |
| $\{\ \}$, | $\{1, 2, 3, 4\}$. | | | | |

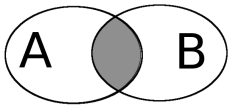
Es gibt $2^4 = 16$ Teilmengen.

7. Seien $A, B, C$ Teilmengen einer Grundmenge $\Omega$. Stellen Sie die folgenden Mengen im Venn-Diagramm dar.

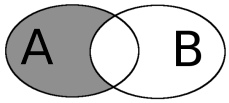
$A \cup B$ :



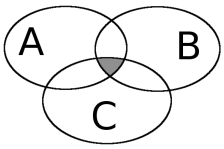

$A \cap B$ :



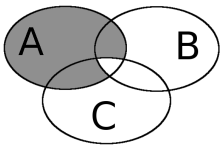

$A \cap \overline{B}$ :

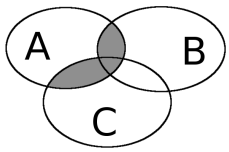



$A \cap B \cap C$ :




$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ :




$A \cap (B \cup C)$ :