Lösungen zu Übungszettel 1 — Aussagenlogik

1. Gegeben seien die Aussagen B, R, T.

$$B := \text{"'Das Buch ist ein Bestseller."'}$$
$$R := \text{"'Das Buch ist ein Roman."'}$$
$$T := \text{"'Das Buch ist teurer als 20 €."'}$$

   (a) Überführen Sie folgende Aussagen in Aussagenlogik:

      i. "'Das Buch ist ein Bestseller und nicht teurer als 20 €."'
      $B \wedge \neg T$

      ii. "'Das Buch ist ein Bestseller, aber es ist teurer als 20 €."'
      $B \wedge T$

   (b) Verbalisieren Sie die folgenden Aussagenverknüpfungen:

      i. $T \vee \neg B$
      "'Das Buch ist teurer als 20 €oder das Buch ist kein Bestseller."'

      ii. $B \Rightarrow \neg R$
      "'Wenn das Buch ein Bestseller ist, dann ist es kein Roman."'

2. Beweise mit Wahrheitstafeln:

   (a) Beweisen Sie die Gültigkeit der Absorptions-Regel $A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

   (b) Zeigen Sie, dass $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ falsch ist.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

   (c) Ist $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ein Widerspruch? Ist die Aussage eine Tautologie?
   Es handelt sich nicht um einen Widerspruch sondern um eine Tautologie:

A	B	C	$B \Rightarrow C =: D$	$A \Rightarrow D =: E$	$A \Rightarrow B =: F$	$A \Rightarrow C =: G$	$F \Rightarrow G =: H$	$E \Leftrightarrow H$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   Beweis der Kontraposition:

$$
\begin{aligned}
& A \Rightarrow B && \mid \text{Implikationselimination} \\
\equiv\ & \neg A \vee B && \mid \text{Kommutativgesetz} \\
\equiv\ & B \vee \neg A && \mid \text{Doppelnegation} \\
\equiv\ & \neg\neg B \vee \neg A && \mid \text{Implikationsumformung} \\
\equiv\ & \neg B \rightarrow \neg A
\end{aligned}
$$

4. Beweisen Sie durch Umformen oder mit Wahrheitstafeln: $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

5. Beweisen Sie durch Umformen: $(A \Leftrightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow (A \wedge (A \vee B)))$

$$
\begin{aligned}
& A \Leftrightarrow B && \mid \text{Äquivalenzelimination} \\
\equiv\ & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) && \mid \text{Implikationselimination} \\
\equiv\ & (\neg A \vee B) \wedge (B \Rightarrow A) && \mid \text{De Morgan} \\
\equiv\ & \neg(\neg\neg A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A) && \mid \text{Doppelnegation} \\
\equiv\ & \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A) && \mid \text{Absorbtionsregel} \\
\equiv\ & \neg(A \wedge \neg B) \wedge (B \Rightarrow A \wedge (A \vee B))
\end{aligned}
$$