Lösungen zu Übungszettel 6 – Vollständige Induktion

6.1 (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ungeraden Zahlen ist n^2, d.h. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Lösung: Beweis (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1}(2i-1) &= 1^2 \\ 2 \cdot 1 - 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\text{z. z.:} \quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) \overset{!}{=} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right] + 2(n+1) - 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

6.2 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lösung:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} &= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 && (1)\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} i^3\right] + (n+1)^3 && (2)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && (3)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} && (4)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} && (5)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1))}{4} && (6)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} && (7)\\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} && (8)
\end{aligned}$$

6.3 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar

Lösung:

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$:

$$\begin{aligned}
&6 \mid (0^3 + 5 * 0) && (9)\\
\Leftrightarrow\ &6 \mid 0 \checkmark && (10)
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 && (11)\\
&= (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6 && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar, der letzte ist offensichtlich durch 6 teilbar.
Uns interessiert jetzt also nur noch, ob $3(n^2+n)$ durch 6 teilbar ist. Auf dem ÜB „Beweismethoden“ haben wir gezeigt, dass n^2+n stets gerade ist. Demnach ist auch $3(n^2+n)$ und damit der gesamte Ausdruck durch 6 teilbar.