Lösungen zu Übungszettel 7 – Lineare Algebra

7.1 Berechne die folgenden Summen:

(a)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 10 \\ -7 & 8 & 11 \\ 26 & 31 & -14 \end{pmatrix}$$

7.2 Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 43 \\ 17 & 31 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 23 \\ 31 & 22 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 38 & 13 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 4 \\ 21 & 9 & 1 \\ 54 & 25 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

7.3 Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?

Lösung: Es soll auffallen, dass die Addition von Matrizen kommutativ ist, während die Multiplikation nicht kommutativ ist.

7.4 Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Es existiert keine Inverse}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{46} \\ \frac{1}{23} & \frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.5 Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow x = 2, \; y = 7$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow x = 3, \; y = -1, \; z = 2$$

7.6 Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{3}\cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 6\cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 3\cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 2\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Somit müsste $0x + 0y + 0z = 11$ gelten, aber das funktioniert nicht.
Also hat die Gleichung keine Lösung.

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2\cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich die Gleichung:

$$x + 2 \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3 - x}{2}$$

Die Lösungen der Gleichung sind folglich alle Punkte dieser Geraden.
Also hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

7.7 Beweise: Eine beliebige 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

Hinweis: Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.

Lösung: Sei $ad - bc \neq 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $a \neq 0$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \frac{c}{a}\cdot Z_1}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{Z_2 \to \frac{a}{ad-bc}\cdot Z_2}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - b\cdot Z_2}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{a}\cdot Z_1}
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) .
$$

Folglich ist die Matrix invertierbar und es gilt:

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .
$$

Falls $a = 0$ (diese Fallunterscheidung ist notwendig, da sonst oben durch Null geteilt wird), vertausche am Anfang der Umformungen die erste und zweite Zeile und gehe analog vor:

$$
\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} .
$$

Allgemein gilt unabhängig vom Wert für a

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .
$$