Lösungen zu Übungszettel 3 – Arithmetik

3.1 (a) Stellen Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar:

(i) $6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = \sum_{i=2}^{7} 3i$

(ii) $16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4 = \sum_{i=0}^{4} 2^{4-i} a^i$

(iii) Verschieben Sie den Summenindex in Aufgabenteil (i) um 1 nach oben. Wie muss die Summe in Summenzeichenschreibweise dann notiert werden? $\sum_{i=3}^{8} 3(i-1)$

(b) Stellen Sie die Produkte mit Hilfe des Produktzeichens dar:

(i) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = \prod_{i=0}^{5} (1 + 2i)$

(ii) $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{26} = \prod_{i=1}^{5} \frac{3i}{i^2+1}$

3.2 Erinnere dich daran, wie man den letzten Summanden aus einer Summe zieht. Führe dies für folgende Summen durch:

(a) $\sum\limits_{i=0}^{n+1} (i+1)^2 \;=\; \sum\limits_{i=0}^{n} (i+1)^2 \;+\; (n+2)^2$

(b) $\sum\limits_{s=0}^{n} (s+1) \;=\; \sum\limits_{s=0}^{n-1} (s+1) \;+\; n+1$

(c) $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \left(\frac{i-1}{i} + 1\right) \;=\; \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{i} + 1\right) \;+\; \frac{n}{n+1} + 1$

3.3 (a) Multiplizieren Sie aus, und fassen Sie, falls möglich, zusammen.

(i) $5(x+y+z) - 7(x-y+z) - 8(x+y-z)$
$= 5x + 5y + 5z - 7x + 7y - 7z - 8x - 8y + 8z$
$= -10x + 4y + 6z$
$= 2(-5x + 2y + 3z)$

(ii) $69p + (13q - (17p + 11q)) - (11p - (13p - 17q))$
$= 69p + 13q - 17p - 11q - 11p + 13p - 17q$
$= 54p - 15q$
$= 3(18p - 5q)$

(b) Klammern Sie möglichst weit aus:

(i) $ax + bx + ay + by$
$= x(a+b) + y(a+b)$
$= (x+y)(a+b)$

(ii) $(a-b) \cdot (2x - 3y) - (a-b) \cdot (x - 3y)$
$= 2ax - 3ay - 2bx + 3by - ax + 3ay + bx - 3by$
$= ax - bx = (a-b)x$

3.4 (a) Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Hauptnenner, und vereinfachen Sie, falls möglich.

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{x^2 y} + \frac{6}{y^2} = \frac{xy^2 - x^2 y + 2y + 6x^2}{x^2 y^2}$

(ii) $1 - \frac{1}{x-y} = \frac{x-y-1}{x-y}$

(iii) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y}{x^2-y^2}$

3.5 (a) Fassen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen:

(i) $(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1}) = (-a^{-1})^3 = -a^{-3}$

(ii) $b(ba^0)(a^0b)(a^0b)(b^1) = b^2(a^0b)^3 = b^2a^0b^3 = b^5$

3.6 (a) Unter welchen Bedingungen können folgende Zahlen Radikand einer Quadratwurzel sein? Geben Sie konkrete Definitionen für den Wert a an (z.B. $a \in \mathbb{N}, \dots$).

$$+a,\ -a,\ -a^2,\ +a^3,\ -a^3,\ +(a-b),\ -(a-b)$$

Lösung:

(i) Für $+a$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(ii) Für $-a$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

(iii) Für $-a^2$: $-a^2$ kann nur für $a = 0$ Radikand einer Quadratwurzel sein

(iv) Für $+a^3$: $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(v) Für $-a^3$: $a \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

(vi) Für $+(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \geq b)$

(vii) Für $-(a-b)$: $a, b \in \mathbb{R} \mid (a \leq b)$

(b) Addieren Sie:

(i) $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75} = 6\sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{36 \cdot 3} - 7\sqrt{25 \cdot 3} = -5\sqrt{3}$