Lösungen zu Übungszettel 8 – Abbildungen

8.1 Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2 + x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ g(x) = x + 3$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ h(x) = x^3$$

gegeben. Berechne:

(a) $(f \circ g)(3) \quad = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6^2 + 6 = 42$

(b) $(g \circ h \circ f)(2) \quad = g(h(f(2))) = g(h(6)) = g(216) = 219$

(c) $(h \circ g)(3) \quad = h(g(3)) = h(6) = 216$

(d) $(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + x + 3 = (x+4)(x+3)$

8.2 Untersuche die folgenden Vorschriften. Prüfe dabei, ob es sich um Abbildungen handelt und bestimme in diesem Fall das Bild dieser, sowie ob die Vorschrift injektiv oder surjektiv ist. Welche der Abbildungen sind bijektiv?

(a) $f_1 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = 7x^2 + 3$

> **Lösung:** f_1 ist eine Abbildung, Bild von f_1 sind alle reellen Zahlen größer oder gleich 3, f_1 ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) $f_2 : \ \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\}, \ f_2(x) = 2^x$

> **Lösung:** f_2 ist eine Abbildung, da $2^1 = 2, \ 2^4 = 16, 2^6 = 64$ gilt. f_2 ist ferner surjektiv und injektiv, damit also bijektiv und somit ist das Bild von f_2 gerade $\{2, 16, 64\}$

(c) $f_3 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_3(x) = \frac{1}{x}$

> **Lösung:** f_3 ist keine Abbildung, da $f_3(0)$ nicht definiert ist.

(d) $f_4 : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$

> **Lösung:** f_4 ist eine Abbildung, das Bild von f_4 ist $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\}$, denn: $\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{2z+1}{2}} = \dfrac{2z}{2z+1}$. f_4 ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, da die 1 zum Beispiel nicht getroffen wird. f_2 ist aber injektiv, da für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
>
> $$\frac{z_1}{z_1 + \frac{1}{2}} = \frac{z_2}{z_2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow z_1(z_2 + \frac{1}{2}) = z_2(z_1 + \frac{1}{2}) \Rightarrow z_1 z_2 + \frac{1}{2} z_1 = z_2 z_1 + \frac{1}{2} z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

(e) $f_5 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$

> **Lösung:** f_5 ist keine Abbildung, da $f_5(1) \neq f_5(\frac{3}{3})$ gilt.

(f) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \varnothing \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \min\{n \mid n \in A\}$, wobei $\min\{n \mid n \in A\}$ den Wert des kleinsten Elementes aus A bezeichnet.

> **Lösung:** f_7 ist eine Abbildung. Sie ist surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{N} :\ \{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, ist aber nicht injektiv, da bspw. $\{1, 2, 3\}\ und\ \{1, 2\}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegen. Wegen der Surjektivität ist das Bild von f_7 gerade $\mathbb{N}$.

8.3 Finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f :\ M \to N$, sodass gilt:

(a) Das Bild $f(\{Tabea, Hannes, Malte\})$ ist $\{Mathe\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{Mathe\})$ ist ungleich $\{Tabea, Hannes, Malte\}$.

> **Lösung:** $N := \{Mathe\},\ M := \{Tabea, Hannes, Malte, Stefanie\},\ f(x) = Mathe$

(b) Die Mächtigkeit des Wertebereiches von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich.

> **Lösung:** $M := \mathbb{R},\ N := \mathbb{R},\ f(x) = 0$

(c) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. Hinweis: Schreibe $x \in \mathbb{Q}$ als $x = \frac{a}{b}$. Eine Abbildungsvorschrift kann dann zum Beispiel mit dem größten gemeinsamen Teiler von a und b bestimmt werden.

> **Lösung:** $M := \mathbb{Q},\ N := \mathbb{Z},\ f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{ggt}(a,b)}$. Dies ist wohldefiniert, denn es gilt $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{ggt}(a,b)} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \mathrm{ggt}(a,b)} = \frac{na}{\mathrm{ggt}(na,nb)} = f(\frac{na}{nb})$ und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}$ sind genau dann gleich, wenn es $a, b, n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x_1 = \frac{a}{b} = \frac{na}{nb} = x_2$ gilt.