Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Mengenlehre

Mandy Mischke, September 19, 2023

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Outline

Darstellung von Mengen
- Venn-Diagramme
- Mächtigkeit

Wichtige Mengen von Zahlen

Prädikatenlogik
- Quantoren
- Negation
- Verwendung von mehreren Quantoren

Relationen zwischen Mengen
- Potenzmenge

Mengenoperationen
- Differenz
- Vereinigung
- Schnitt
- Komplement
- Eigenschaften

Mengen

Definition 2.1: Menge

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Diese Objekte m nennen wir Elemente von M und schreiben kurz: $m \in M$ („m ist Element aus M“). Um auszudrücken, dass ein Element x nicht in M enthalten ist, wird $x \notin M$ geschrieben.

Darstellung von Mengen

- aufzählende Schreibweise

$$J = \{\mathit{Frühling}, \mathit{Sommer}, \mathit{Herbst}, \mathit{Winter}\}$$

- elliptische Schreibweise

$$S = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$$

- beschreibende Schreibweise

$$M = \{\text{Objekte } m \underbrace{\quad | \quad}_{\text{"`für die gilt"'}} m \text{ erfüllt eine logische Aussage}\}$$

Venn-Diagramme

$A = \{2, 3\} \qquad B = \{3, 5\} \qquad \Omega = \{2, 3, 4, 5\}$

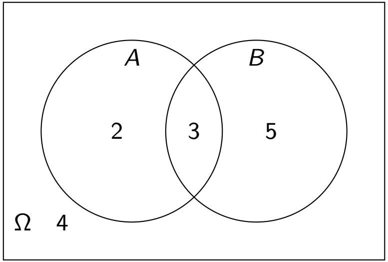


Figure 1: Venn-Diagramm mit zwei Mengen

Mächtigkeit

Definition 2.5: Mächtigkeit

Sei M eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente (oder auch **Mächtigkeit** oder **Betrag**) dieser Menge ist definiert als:

$$\#(M) := |M| := \text{Anzahl der Elemente von } M$$

Beispiele:

- $4 = |\{1, 3, 5, 7\}| = |\{1, 1, 3, 5, 5, 5, 7, 7\}|$
- $0 = |\emptyset|$

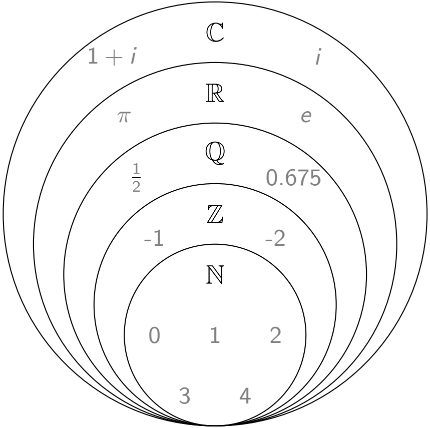
Wichtige Menge von Zahlen

Definition 2.2: Leere Menge

Die Leere Menge enthält keine Elemente und wird als $\{\ \}$ oder $\emptyset$ geschrieben.

- Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
- Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k \mid n \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}\right\}$
- Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Zahlenmengen



Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert

Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert
- Aussagen über Mengen beschreiben Eigenschaften der Elemente oder Enthaltenseinsbeziehung

Prädikatenlogik

- Aussagen über Mengen wünschenswert
- Aussagen über Mengen beschreiben Eigenschaften der Elemente oder Enthaltenseinsbeziehung
- Beschreibung mithilfe von Quantoren

Quantoren

Allquantor: Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft E für alle Elemente einer Menge gilt wird der *Allquantor* $\forall$ genutzt:

$$\forall x \in M : E(x)$$

(„Für alle Elemente x in M gilt Eigenschaft E. “)

Existenzquantor: Um auszudrücken, dass eine Eigenschaft für mindestens ein Element einer Menge zutrifft wird der *Existenzquantor* $\exists$ genutzt:

$$\exists x \in M : E(x)$$

(„Es existiert ein Element x in M, für das die Eigenschaft E gilt. “)

Negation

Eine quantifizierte Aussage kann negiert werden, indem der jeweils andere Quantor verwendet und die Eigenschaft negiert wird:

$$\neg(\forall x : \text{x hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \exists x : \text{x hat nicht Eigenschaft } E$$
$$\neg(\exists x : \text{x hat Eigenschaft } E) \Leftrightarrow \forall x : \text{x hat nicht Eigenschaft } E$$

Verwendung von mehreren Quantoren

- Verwendung mehrerer Quantoren möglich
- Reihenfolge der Quantoren ist für Bedeutung der Aussage entscheidend

Beispiele:

- Für alle natürlichen Zahlen existiert eine natürliche Zahl, die größer ist.
  $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : n < m$
- Es existiert eine natürliche Zahl, für die alle natürlichen Zahlen größer sind.
  $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : n < m$
- Alle rationalen Zahlen lassen sich als Bruch aus einer ganzen und einer natürlichen Zahl ohne Null darstellen.
  $\forall q \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : q = \frac{z}{n}$

Relationen zwischen Mengen

Definition 2.6: Teilmenge

Seien $M, , N$ zwei Mengen, dann ist M genau dann eine Teilmenge von N, wenn jedes Element der Menge M auch ein Element der Menge N ist:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow \forall m \in M : m \in N$$

Relationen zwischen Mengen

Lemma 2.7: Leere Menge als Teilmenge

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge. Für jede Menge M gilt also $\emptyset \subseteq M$.

Lemma 2.8: Transitivität für Teilmengen

Seien A, B, C Mengen und gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$.
Dann gilt $A \subseteq C$.

Relationen zwischen Mengen

Definition 2.9: Gleichheit von Mengen

Seien M, N zwei Mengen. Wir nennen die Mengen M und N gleich, wenn für alle Elemente gilt, dass sie genau dann in M enthalten sind, wenn sie auch in N enthalten sind:

$$M = N :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

Die Gleichheit von Mengen kann auch unter Benutzung der Teilmengenrelation definiert werden: Wir nennen die Mengen M und N gleich, wenn sowohl M eine Teilmenge von N als auch N Teilmenge von M ist.

$$M = N :\Leftrightarrow M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$$

Potenzmenge

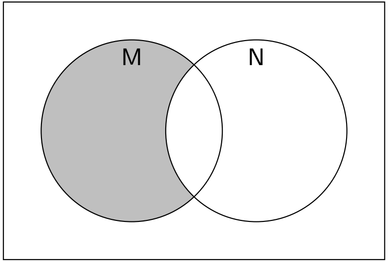
Definition 2.10: Potenzmenge

Sei M eine Menge. Die Potenzmenge der Menge M ist diejenige Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau sämtliche Teilmengen der Menge M sind.
Schreibe: $\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$

Mengenoperationen - Differenz

Definition 2.11: Differenz

Seien M, N Mengen. Die Differenz $M \setminus N$ („M ohne N“), ist diejenige Teilmenge von M, welche genau die Elemente von M enthält, die nicht in der Menge N sind.
Schreibe: $M \setminus N := \{m \mid m \in M \land m \notin N\}$

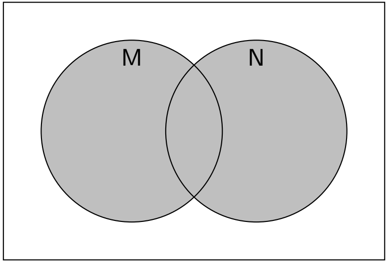


Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Mengenoperationen - Vereinigung

Definition 2.12: Vereinigung

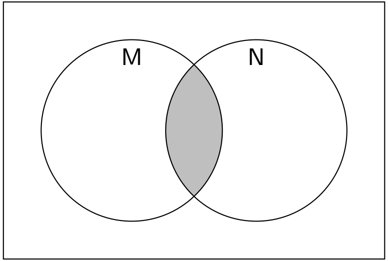
Seien M, N Mengen. Die Vereinigung $M \cup N$ („M vereinigt (mit) N") enthält genau die Elemente, die in mindestens einer der Mengen M und N vorkommen.
Schreibe: $M \cup N := \{m \mid m \in M \vee m \in N\}$



Mengenoperationen - Schnitt

Definition 2.13: Schnitt

Seien M, N Mengen. Der Schnitt $M \cap N$ („M geschnitten (mit) N“) ist diejenige Menge, welche aus genau den Elementen besteht, welche sowohl in M als auch in N enthalten sind.
Schreibe: $M \cap N := \{m \mid m \in M \wedge m \in N\}$

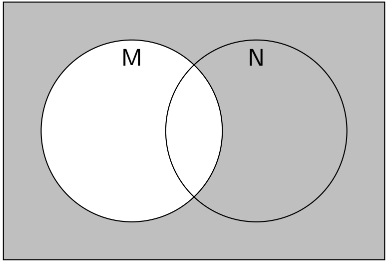


Mengenoperationen - Komplement

Definition 2.14: Komplement

Sei M eine Teilmenge einer Menge Ω. Das Komplement $M^c = \overline{M}$ der Menge M (bezüglich der Menge Ω) besteht aus allen übrigen, nicht in M enthaltenen Elementen von Ω.

Schreibe: $\quad M^c := \overline{M} := \Omega \setminus M$.



Eigenschaften

Lemma 2.15: Eigenschaften

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Kommutativgesetze:} \quad & A \cap B = B \cap A \\
& A \cup B = B \cup A \\
\text{Assoziativgesetze:} \quad & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
& (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
\text{Distributivgesetze:} \quad & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
& (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}$$

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Eigenschaften

Lemma 2.15: Eigenschaften

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Regeln von de Morgan:} \quad & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\
& \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
\text{Absorbtionsregeln:} \quad & A \cap (A \cup B) = A \\
& A \cup (A \cap B) = A \\
\text{Doppelnegation:} \quad & \neg\neg A = A \\
\text{Kontraposition:} \quad & (A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})
\end{aligned}$$