Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Aussagenlogik

Mandy Mischke, September 19, 2023

Aussagen

Definition 1.1: Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert *wahr* (kurz w bzw. 1) oder *falsch* (kurz f bzw. 0) zuordnen lässt.

Beispiele:

- Die Kuh ist lila..

Gegenbeispiele:

- "Ist Wasser grün?"

Abkürzung von Aussagen häufig durch Buchstaben:

$$\underbrace{\text{„Die Kuh ist lila.“}}_{=:\, A}$$

Junktoren

- Verknüpfung logischer Aussagen zu komplexeren Aussagen
- Wahrheitswerte werden abhängig von Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen definiert

Beispiele:

- Die Kuh ist *nicht* lila.
- Die Kuh ist lila *oder* die Kuh ist *nicht* lila.
- Wenn das Gras grün ist, dann ist die Kuh lila.

Negation

Definition 1.2: Negation

Die Negation der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder $\overline{A}$. Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Negation

Definition 1.2: Negation

Die Negation der Aussage A (auch: logisches NICHT) bezeichnen wir mit $\neg A$ oder $\overline{A}$.
Negation verändert den Wahrheitswert von wahr auf falsch oder umgekehrt.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	$\neg A$
f	w
w	f

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Konjunktion

Definition 1.3: Konjunktion

Die Konjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Konjunktion

Definition 1.3: Konjunktion

Die Konjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches UND) bezeichnet man mit $A \wedge B$. Die Konjunktion ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion

Definition 1.4: Disjunktion

Die Disjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Disjunktion

Definition 1.4: Disjunktion

Die Disjunktion der Aussagen A und B (auch: logisches ODER) bezeichnet man mit $A \vee B$. Die Disjunktion ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

Definition 1.5: Implikation

Die Implikation der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Implikation

Definition 1.5: Implikation

Die Implikation der Aussage B aus A (auch: logische Folgerung) bezeichnet man mit $A \Rightarrow B$. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem etwas Falsches geschlossen wird.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Äquivalent

Definition 1.6: Äquivalenz

Die Äquivalenz (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Äquivalent

Definition 1.6: Äquivalenz

Die Äquivalenz (auch: logische Gleichwertigkeit) der Aussagen A und B bezeichnet man mit $A \Leftrightarrow B$. Die Äquivalenz ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

Darstellung als Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Klammerung

- Verknüpfung Junktoren enthaltenden Aussagen möglich
- Problem:

$$\text{Welchen Wahrheitswert hat } A \vee B \wedge C \text{ ?}$$

- Einführung einer Klammerung zur Priorisierung
- Zur Vereinfachung haben die logischen Verknüpfungen hier folgende (absteigende) Priorität

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Achtung: Diese Priorisierung wird nicht immer vereinbart!

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Tautologie, Widerspruch, Äquivalenz

Definition 1.6: Tautologie

Eine Aussage, welche stets wahr ist, nennen wir Tautologie.

Definition 1.7: Widerspruch

Eine Aussage, welche stets falsch ist, nennen wir Widerspruch.

Definition 1.8: Äquivalenz

Zwei Aussagen A und B heißen äquivalent, geschrieben $A \equiv B$, falls sie stets den selben Wahrheitswert besitzen.

Wichtige Regeln

Kommutativgesetz:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Assoziativgesetz:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

Distributivgesetz:

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Regel von de Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Wichtige Regeln

$$
\begin{aligned}
\text{Implikationselimination:} \quad & (A \Rightarrow B) \equiv \neg A \lor B \\
\text{Äquivalenzelimination:} \quad & (A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A) \\
\text{Absorbtionsregel:} \quad & A \land (A \lor B) \equiv A \\
& A \lor (A \land B) \equiv A \\
\text{Doppelnegation:} \quad & \neg\neg A \equiv A \\
\text{Kontraposition:} \quad & (A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)
\end{aligned}
$$