Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Lineare Algebra

× Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Berechne:

a)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ii) \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$i) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hast du eine geometrische Erklärung für das Ergebnis?

Lösung:

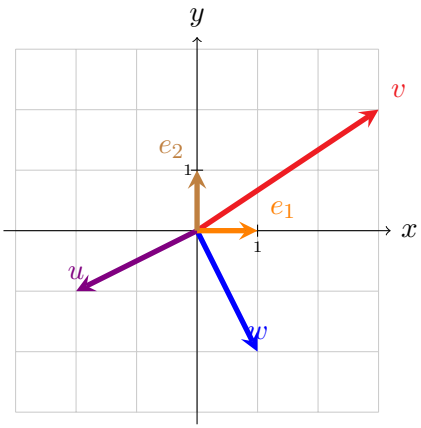
$$i)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch korrespondiert, wie bereits gesehen, die erste Matrix zur Drehung Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn, die zweite zur Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Die Rechnung sagt nun, dass, wenn man erst gegen und dann im Uhrzeigersinn (oder andersherum) dreht, nicht passiert. Das ist aber klar.

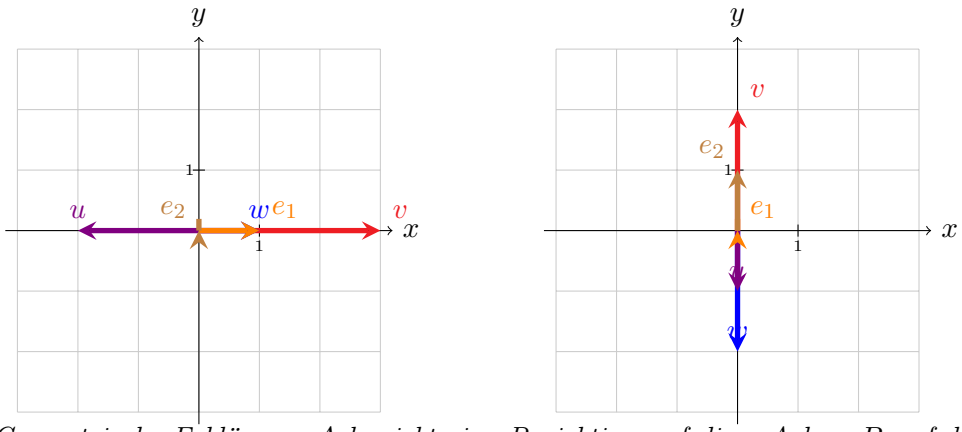
× Aufgabe 2: Projektionen

Betrachte e_1, e_2 und $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Zeichne die Vektoren im $\mathbb{R}^2$.
Lösung:



b) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechne für alle Vektoren aus a) das Produkt, also $A \cdot y$ und $B \cdot y$. Zeichne die Ergebnisse. Erkläre die Ergebnisse geometrisch.
Lösung: $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$B \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \cdot w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Geometrische Erklärung: A bewirkt eine Projektion auf die x-Achse, B auf die y-Achse.

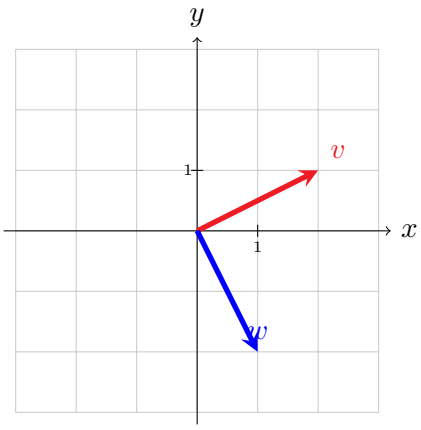
c) Bewirken $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ das gleiche? Wieso (nicht)? Erkläre geometrisch.

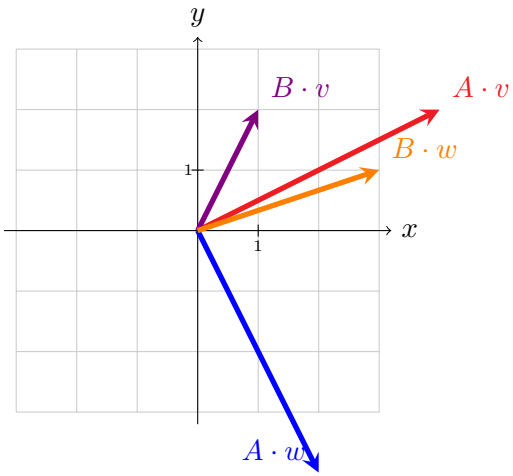
Lösung: Nein. Bei einer Projektion wird ein Vektor auf eine Achse projiziert, indem alle anderen Einträge Null werden. Das ist hier nicht der Fall, da bei der angeblichen Projektion auf die x-Achse der y Eintrag zum x-Wert wird. (und umgekehrt).

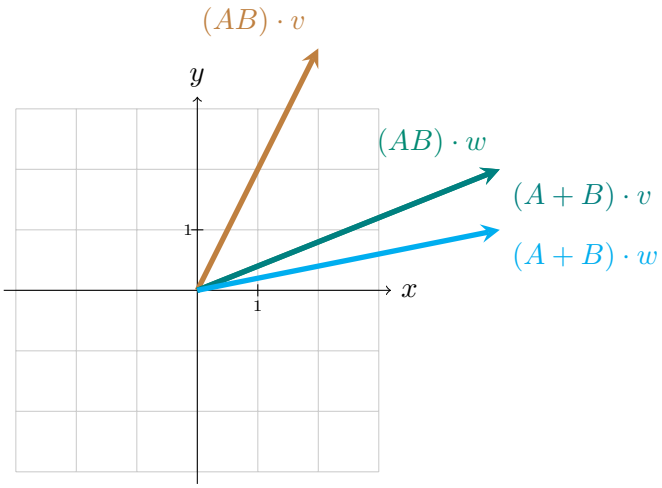
d) Sind die Transformationen, die die Matrizen A und B bewirken, invertierbar? Finde die Inverse oder argumentiere gegen die Invertierbarkeit. Erkläre in beiden Fällen geometrisch. *Lösung: Nicht invertierbar. Einfachste Lösung über die Determinante (ist für beide null). Geometrisch gesehen können die zwei Vektoren, die durch die Projektion gleich geworden sind (bspw. e_1 und w) nicht mehr durch eine Rücktransformation zu unterschiedlichen Vektoren werden. Knackpunkt ist die fehlende Bijektivität als Lineare Abbildung.*

Aufgabe 3: Matrizen anschaulich

Für $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeichne v und w. Berechne dann $A \cdot v$, $A \cdot w$, $B \cdot v$, $B \cdot w$, $(AB) \cdot v$, $(AB) \cdot w$ und $(A+B) \cdot v$, $(A+B) \cdot w$ und zeiche diese ebenfalls.
Lösung:







$A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot w = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $B \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \cdot w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB) \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $(AB) \cdot w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(A + B) \cdot v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(A + B) \cdot w = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: Mach das wieder zurück

Gegeben sei die Matrix $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$.

a) Bestimme, für welche Werte von k die Matrix A_k invertierbar ist.

b) Bestimme für $k = 7$ die inverse Matrix A_7^{-1}.

c) Jemand behauptet, dass für $k = 3$ gilt:

$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Überprüfe diese Behauptung und korrigiere sie gegebenenfalls.
Prüfe das Ergebnis, indem gezeigt wird, dass

$A_3 A_3^{-1} = E$ gilt.

Lösung:

a) *Für A_k gilt:* $k \cdot k - 2 \cdot 3 = k^2 - 6$.
Die Matrix ist also genau dann invertierbar, wenn $k^2 - 6 \neq 0$.
Also $k \neq \pm\sqrt{6}$.

b) *Für $k = 7$ ergibt sich* $A_7 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Da* $7 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 49 - 6 = 43 \neq 0$, *ist* A_7 *invertierbar. Also* $A_7^{-1} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. *Die Behauptung ist daher* ***falsch***.

c) *Zur Überprüfung berechnen wir das Produkt:* $A_3 A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5: Linearkombinationen

a) Schreibe die folgenden Vektoren als Linearkombination von e_1 und e_2.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \pi \end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot e_1 + e_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \pi \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot e_1 + \pi \cdot e_2$

b) Schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der folgenden Vektoren.

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{10}{11}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \frac{7}{11}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$,

! Aufgabe 6: Matrtizen und Lineare Abbildungen

Lies Zusatzkapitel 12.6 im Skript (Lineare Abbildungen und was sie mit Matrizen zu tun haben), insbesondere die Definition:

Definition I
Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennen wir **linear**, wenn für $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(v+w) = F(v) + F(w),$$
$$F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v).$$

Beweise dann den Satz:

Satz II
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$v \mapsto A \cdot v$$

eine lineare Abbildung.

Lösung:

Beweis: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Zeige: $F(v+w) = F(v)+F(w)$ und $F(\lambda\cdot v) = \lambda\cdot F(v)$. Es gilt mit Rechenregel v): $F(v+w) = A\cdot(v+w) = A(v)\cdot A(w) = F(v)\cdot F(w)$. Und mit Rechenregel ii): $F(\lambda\cdot v) = A(\lambda\cdot v) = \lambda\cdot(A\cdot v) = \lambda\cdot F(v)$. □