Vorkurs Mathematik 2026 | Aufgaben zum Thema

Lineare Algebra

× Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Berechne:

a)

$$i) \quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad ii) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

b)

$$i) \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}2 & -4\\0 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

d)

$$i) \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \quad ii) \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Hast du eine geometrische Erklärung für das Ergebnis?

× Aufgabe 2: Projektionen

Betrachte e_1, e_2 und $u = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

a) Zeichne die Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

b) Für $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ berechne für alle Vektoren aus a) das Produkt, also $A \cdot y$ und $B \cdot y$. Zeichne die Ergebnisse. Erkläre die Ergebnisse geometrisch.

c) Bewirken $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ das gleiche? Wieso (nicht)? Erkläre geometrisch.

d) Sind die Transformationen, die die Matrizen A und B bewirken, invertierbar? Finde die Inverse oder argumentiere gegen die Invertierbarkeit. Erkläre in beiden Fällen geometrisch.

×= Wichtige Aufgabe

!= Schwierige Aufgabe

Aufgabe 3: Matrizen anschaulich

Für $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeichne v und w. Berechne dann $A \cdot v$, $A \cdot w$, $B \cdot v$, $B \cdot w$, $(AB) \cdot v$, $(AB) \cdot w$ und $(A+B) \cdot v$, $(A+B) \cdot w$ und zeiche diese ebenfalls.

Aufgabe 4: Mach das wieder zurück

Gegeben sei die Matrix $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$.

a) Bestimme, für welche Werte von k die Matrix A_k invertierbar ist.

b) Bestimme für $k = 7$ die inverse Matrix A_7^{-1}.

c) Jemand behauptet, dass für $k = 3$ gilt:

$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Überprüfe diese Behauptung und korrigiere sie gegebenenfalls. Prüfe das Ergebnis, indem gezeigt wird, dass $A_3 A_3^{-1} = E$ gilt.

Aufgabe 5: Linearkombinationen

a) Schreibe die folgenden Vektoren als Linearkombination von e_1 und e_2.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \pi \end{pmatrix}$

b) Schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der folgenden Vektoren.

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

! Aufgabe 6: Matrtizen und Lineare Abbildungen

Lies Zusatzkapitel 12.6 im Skript (Lineare Abbildungen und was sie mit Matrizen zu tun haben), insbesondere die Definition:

Definition I
Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennen wir **linear**, wenn für $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(v + w) = F(v) + F(w),$$
$$F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v).$$

Beweise dann den Satz:

Satz II
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$v \mapsto A \cdot v$$

eine lineare Abbildung.