12 Lineare Algebra

Die lineare Algebra ist ein grundlegendes Gebiet in der Mathematik und steht aus gutem Grund am Anfang des Mathematikstudiums. Hier werden Strukturen wie Vektorräume, Matrizen und lineare Gleichungssysteme behandelt und untersucht, wie all diese Objekte zusammenhängen.
An dieser Stelle werden wird uns auf die Betrachtung im $\mathbb{R}^2$ beschränken und die lineare Algebra aus einer geometrischen Perspektive erkunden.

12.1 Vektoren

Wir beginnen damit, unseren grundlegenden Raum zu definieren:

Definition 12.1
Wir definieren die Menge:

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ nennen wir Vektoren des $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Natürlich können Vektoren auch mehr Einträge bekommen und sind dementsprechend aus dem $\mathbb{R}^n$ mit der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. In diesem Kapitel betrachten wir aber nur diese aus der Definition.

Im Zuge dieses Kapitels stellen wir uns Vektoren als Pfeile in der Ebene vor. Dabei gibt die erste Komponente an, wie lang der Pfeil in x- und die zweite, wie lang der Pfeil in y-Richtung ist. Fast immer werden wir annehmen, dass der Anfang des Pfeils im Ursprung liegt.

Beispiel:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

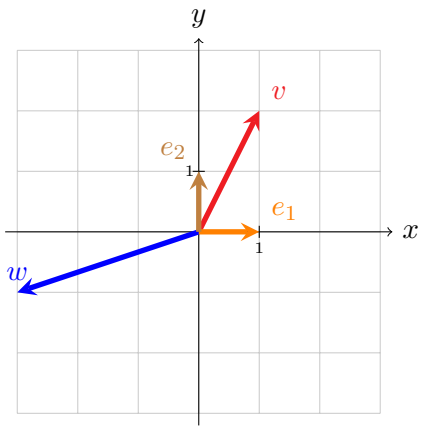


Abbildung 12.1: Beispiel für Vektoren als Pfeile in der Ebene.

Bemerkung: Die Vektoren e_1 und e_2 sind die sogenannten **Standardeinheitsvektoren** und zeigen jeweils um eine Einheit in die Richtung, die sie repräsentieren.

Vielleicht ist aus der Schule bereits die Menge der **Punkte** in der Ebene bekannt, also $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Dies ist nicht das Gleiche wie die Menge der Vektoren in der Ebene, denn **Vektoren sind keine Punkte.** Allerdings gibt es eine sehr enge Beziehung zwischen Vektoren und Punkten:
Jedem Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ können wir einen Punkt p zuordnen, nämlich denjenigen, der an der Spitze des Pfeils liegt, wenn wir dessen Anfang in den Ursprung legen. Dieser Punkt p ist dann $p = (x, y)$. Andererseits können wir jedem Punkt $p = (x, y)$ in der Ebene einen Vektor zuordnen, genauer den Ortsvektor. Dies ist derjenige Vektor v, der vom Ursprung aus auf diesen Punkt zeigt. Für den Ortsvektor gilt dann wieder $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Die Menge der Punkte wird leider auch als $\mathbb{R}^2$ geschrieben; bei uns steht im Folgenden $\mathbb{R}^2$ aber für die Menge der Vektoren! (Die Ebene der Punkte ist übrigens auch die Ebene, in der wir uns die Vektoren immer vorstellen.)

Was kann man mit Vektoren machen? Eine einfache Operation auf einem Vektor ist es, ihn zu **skalieren**, d.h. seine Länge zu ändern, ohne dabei die Richtung zu ändern. Dies erreichen wir, indem wir beide Einträge des Vektors mit einer reellen Zahl multiplizieren, einem sogenannte **Skalar**. Diese Multiplikation nennen wir **Skalarmultiplikation**.
Wenn zwei Vektoren gegeben sind, so können wir sie auch **addieren**. Geometrisch machen wir dies, indem wir den Anfang des zweiten Vektors an das Ende des ersten

Vektors setzen, und der neue Vektor vom Anfang des ersten Vektors zum Ende des zweiten Vektors geht.
Algebraisch machen wir dies, indem wir die Einträge komponentenweise addieren.
Beide Operationen halten wir in folgender Definition fest:

Definition 12.2

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

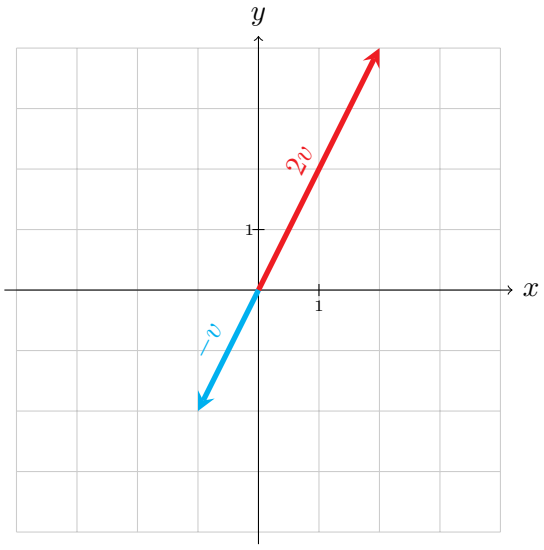
Dann definieren wir

$$v_1 + v_2 := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot v_1 := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Diese Operationen führen wir jetzt mit den Vektoren von oben durch.

$2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $-1 \cdot v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$v + w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 + 2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

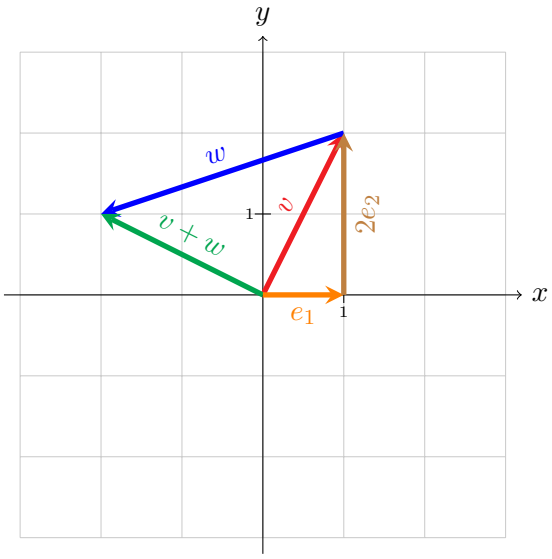


Abbildung 12.2: Beispiele für Skalarmultiplikation und Vektoraddition

Man erkennt, dass ein Vektor in die entgegengesetzte Richtung zeigt, wenn man ihn mit einer negativen Zahl multipliziert.

Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass wir v in der Form

$$v = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ schreiben konnten. Wir sagen dazu, dass wir v als **Linearkombination** von e_1 und e_2 geschrieben haben.
Dies kann man für jeden Vektor machen, denn es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + 0 \\ 0 + y \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \cdot 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2.$$

Es ist klar, dass diese Darstellung für jeden Vektor eindeutig ist.

12.2 Matrizen

Nachdem wir die Vektoren nun gestreckt, gestaucht, gespiegelt und miteinander addiert haben, wollen wir auch noch die Drehung der Vektoren untersuchen. Dafür fangen wir mit der algebraischen Seite an. Dafür definieren wir erstmal ein Objekt, das uns diese Transformation gleich ermöglichen kann.

Definition 12.3
Wird definieren die Menge

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nennen wir **Matrizen** (Einzahl: **Matrix**).

Bemerkung: Natürlich exisiteren Matrizen auch in anderen Größen und Formen. Das interessiert uns hier aber nicht weiter.

Außerdem definieren wir die Rechenoperation, die Matrizen und Vektoren im algebraischen Sinne verknüpft.

Definition 12.4
Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann definieren wir

$$A \cdot v := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

als das **Produkt** von A mit v.

Wie sieht das auf der geometrischen Seite aus? Dafür betrachten wir ein paar Beispiele.

Beispiele:

1. Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e_1, e_2 und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Damit ist $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

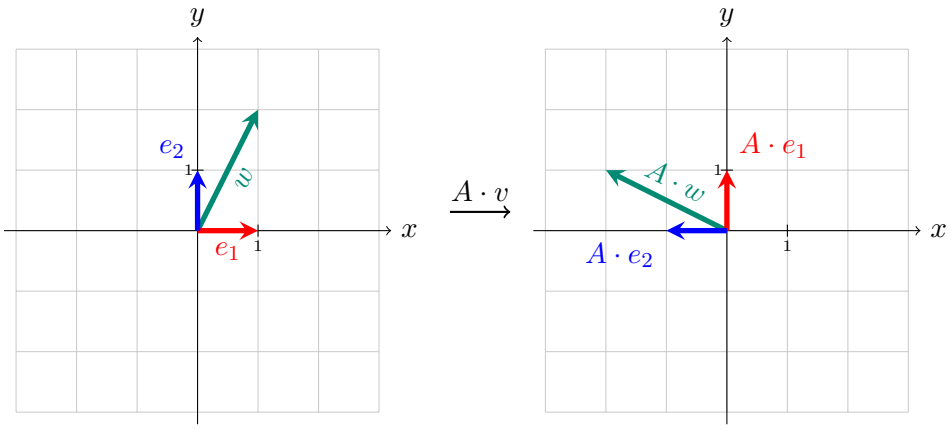


Abbildung 12.3: Darstellung der Linksdrehung um 90° anhand einiger Beispiele.

2. Wir betrachten die Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, e_1, e_2 und $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   Damit ist $B \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \cdot u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

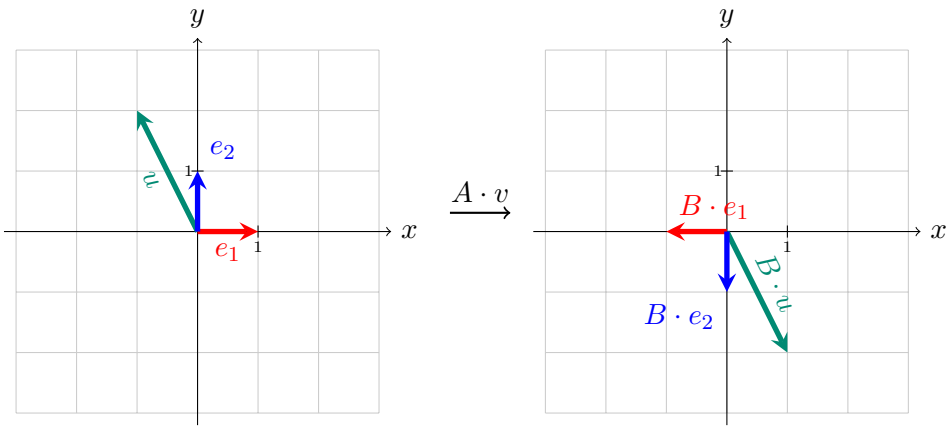


Abbildung 12.4: Darstellung der Drehung um 180° anhand einiger Beispiele.

12.3 Rechnen mit Matrizen

Um später nicht nur Matrizen und Vektoren miteinander verknüpfen zu können, wollen wir die Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation auf Matrizen ausdehnen.

Definition 12.5
Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ zwei Matrizen.
Dann ist die **Summe** von A und B und das **Produkt** von A und B definiert als

$$A + B := \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \text{ und } A \cdot B := \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

Sei zusätzlich $\lambda \in \mathbb{R}$. Die **Skalarmultiplikation** von λ mit A ist definiert als

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Auch bei der Matrizenmultiplikation rechnen wir wieder „Zeile mal Spalte“.

Beispiele: Für Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Addition

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Multiplikation

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Skalarmultiplikation

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beim Rechnen mit reellen Zahlen nimmt die 0 die Rolle als **neutrales Element der Addition** und die 1 die Rolle als **neultrales Element der Multiplikation** ein. Bei Matrizen sind das jeweils $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix E heißt die **Einheitsmatrix**.

Für das Rechnen mit Matrizen und Vektoren gelten folgende Rechenregeln:

Satz 12.6
Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i)	$A + B = B + A$	$v + w = w + v$
ii)	$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$	$\lambda \cdot (A \cdot v) = (\lambda \cdot A) \cdot v = A \cdot (\lambda \cdot v)$
iii)	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$(A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v)$
iv)	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	$(A + B) \cdot v = A \cdot v + B \cdot v$
v)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w$

Diese Regeln lassen sich leicht über die Definitionen nachrechnen. Um das Rechnen mit Matrizen und Vektoren zu üben, sei an dieser Stelle empfohlen, das selbst einmal durchzuführen.

Mit Matrizen und Vektoren lässt es sich also fast so rechnen wie mit reellen Zahlen, mit einer wichtigen Ausnahme:

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**,
d.h. es gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Beispiel: Wir können es direkt nachrechnen. Die Rechnung

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hatten wir bereits im obigen Beispiel gesehen. Andererseits ist

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot B,$$

wie erwartet.

12.4 Invertierung von Matrizen

In den Beispielen in 12.2 haben wir gesehen, wie die Matrizen Drehungen auf Vektoren ausüben. Es liegt nahe, dass diese Drehung jeweils umgekehrt werden kann.

Beispiel: Wir betrachten wieder mal die Linksdrehung $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Anschaulich ist die Operation, die die Linksdrehung rückgängig macht, gerade die Rechtsdrehung C. Diese bildet e_1 auf $-e_2$ und e_2 auf e_1 ab.
Durch etwas Rumprobieren kann man die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ finden. Wenn wir die beiden Matrizen A und C miteinander multiplizieren, dann erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Jedoch findet man nicht für jede Matrix A auch eine Matrix B, sodass

$$A \cdot B = E = B \cdot A \tag{12.1}$$

gilt. Für Matrizen, für die so etwas geht, führen wir einen speziellen Namen ein:

Definition 12.7
Eine Matrix A heißt **invertierbar**, falls es eine Matrix B gibt, sodass

$$A \cdot B = E = B \cdot A.$$

Die Matrix B nennen wir in diesem Fall die Inverse[1] von A und schreiben $B = A^{-1}$.

Wie lässt sich also feststellen, ob eine Matrix invertierbar ist? In unserem Fall wird diese Frage durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 12.8
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$ eine Matrix. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall ist $B = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die Inverse.

Beweis: Wir definieren uns zuerst $\tilde{B} := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und rechnen:

$$A \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -bc + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{B} \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

[1] Man kann zeigen, dass die Inverse eindeutig ist, wenn sie existiert.

Damit können wir nun beide Richtungen zeigen.

Hinrichtung (direkt):
Ist nun $ad - bc \neq 0$, so können wir dadurch teilen und es ist

$$A \cdot B = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = E$$

und analog $B \cdot A = E$.

Rückrichtung (mit Widerspruch):
Wir nehmen an, dass A invertierbar ist und $ad - bc = 0$. Dann haben wir

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \tilde{B} = \tilde{B} \cdot E = \tilde{B} \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann muss aber $a = b = c = d = 0$ gelten. In diesem Fall würde aber offenbar $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ folgen, im Widerspruch zu $AA^{-1} = E$. □

Beispiel: Wir betrachten wieder die Linksdrehung $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hier ist $ad-bc = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0$. A ist also invertierbar, und die Inverse ist $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dies hatten wir schon oben gesehen.
Für die Projektion P mit darstellender Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir

$$ad - bc = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Wie schon gesehen ist also B nicht invertierbar.

12.5 Ausblick

Was wird jetzt in der Vorlesung „Lineare Algebra“ behandelt?
Zunächst einmal wird alles wesentlich allgemeiner aufgebaut. Der Begriff der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird zum Begriff der **Körper** erweitert. Aus dem Konzept des $\mathbb{R}^2$ mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation wird der allgemeine Begriff des **Vektorraums**. Zum Beispiel werden auch $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, ...$, oder auch K^n für einen allgemeinen Körper K und ganz abstrakte Vektorräume auftauchen. Die beiden Vektoren e_1 und e_2, mit denen sich jeder Vektor eindeutig darstellen ließ, werden zum Begriff der **Basis** verallgemeinert.

Außerdem wird behandelt, wie sich die lineare Algebra auf **lineare Gleichungssysteme** anwenden lässt. Dazu sei hier nur bemerkt, dass sich ein lineares Gleichungssystem

$$ax + by = s$$
$$cx + dy = t$$

kompakt als $Av = w$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

schreiben lässt. Diese Form lässt sich meistens einfacher untersuchen, z.B. mit der Theorie der Invertierung von Matrizen, oder allgemeiner mit dem **Gauß-Algorithmus**. Für ein Beispiel siehe Kapitel 12.7.

12.6 Zusatzkapitel: Lineare Abbildungen und was sie mit Matrizen zu tun haben

Ein wichtiger Aspekt der Matrizen und dem Zusammenspiel mit Abbildungen wurde in diesem Vortrag unterschlagen. Wenn man sich genug (oder zumindest die richtigen) Beispiele anschaut, wird klar: Es ist egal, ob man Vektoren zuerst addiert und dann dreht bzw. projiziert[2], oder zuerst dreht bzw. projiziert und dann addiert. Selbiges gilt für die Skalarmultiplikation anstatt der Addition. Abbildungen, die diese Eigenschaften erfüllen, wollen wir **linear** nennen.

Definition 12.9
Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennen wir **linear**, wenn für $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(v + w) = F(v) + F(w),$$
$$F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v).$$

Eine wichtige Erkenntnis ist die Folgende: Wenn wir wissen, dass eine Abbildung F linear ist, so ist sie eindeutig durch zwei Vektoren – nämlich die Bilder von e_1 und e_2 – festgelegt. Denn einen beliebigen Vektor v konnten wir ja schreiben als $v = \lambda e_1 + \mu e_2$, und dann gilt:

$$F(v) = F(\lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2) = F(\lambda \cdot e_1) + F(\mu \cdot e_2) = \lambda \cdot F(e_1) + \mu \cdot F(e_2) \qquad (12.2)$$

Beispiel: Wir betrachten wieder die Linksdrehung L. Wie in Abbildung 12.4 zu sehen, ist $L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ und $L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$. Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ beispielsweise können wir nun wie in Gleichung 12.2 rechnen:

$$L(v) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = L(1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2) = 1 \cdot L(e_1) + 2 \cdot L(e_2) = 2e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist auch in Abbildung 12.4 zu sehen. Wir erkennen auch in diesem Beispiel, dass wir nur die beiden Vektoren $L(e_1)$ und $L(e_2)$ kennen müssen, um das Bild von v zu bestimmen.

[2] Projektion auf die x bzw. y-Achse findet dabei mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ statt

Wir sehen also, dass die gesamte Information über eine lineare Abbildung F in den Bildern von e_1 und e_2 steckt. Diese Bilder, also $F(e_1)$ und $F(e_2)$, schreiben wir jetzt nebeneinander in eine sogenannte **Matrix**, um die Informationen über die lineare Abbildung möglichst kompakt darzustellen.
Ist

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ und } F(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

so nennen wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die F **darstellende Matrix** oder die **Darstellungsmatrix von** F. Da wir bereits gesehen haben, dass F durch $F(e_1)$ und $F(e_2)$ eindeutig festgelegt wird, ist dies eine kompakte Methode, eine lineare Abbildung aufzuschreiben.

Beispiele:

1. Für die Linksdrehung L gilt $L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   L hat also darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Für die Projektion auf die x-Achse P gilt $P(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   P hat also darstellende Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir können mit der Darstellung von v in e_1 und e_2 rechnen:
Wir haben also einen Mechanismus gefunden, der jeder linearen Abbildung eine eindeutige Matrix zuordnet. Es geht aber auch andersherum:

Satz 12.10
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto A \cdot v \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Beweis: Übungsaufgabe □

Lineare Abbildungen und Matrizen beschreiben also im Wesentlichen das Gleiche!

Bemerkung: Mit dieser Erkenntnis kann man die Kapitel 12.3 und 12.4 auch neu lesen: Die Multiplikation von zwei Matrizen ist nichts anderes als die Komposition zweier Abbildungen, wie wir es schon im Kapitel „Funktionen und Abbildungen“ gesehen haben. Das Invertieren sucht eine Umkehrabbildung, die genau dann existiert, wenn die Abbildung bijektiv ist.

12.7 Zusatzkapitel: Lineare Gleichungssysteme

Eine andere Anwendung der linearen Algebra ist es, damit lineare Gleichungssysteme zu lösen, wie wir sie möglicherweise im Kapitel ‚Schulmathematik I' bereits kennengelernt haben. Ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir nun äquivalent als $A \cdot v = b$ schreiben mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist v der Vektor, der die beiden gesuchten Größen enthält. Ist nun A invertierbar, so können wir die Gleichung einfach mit A^{-1} multiplizieren und erhalten $v = A^{-1} \cdot b$, wo wir die Lösung einfach ablesen können.
In dem gegebenen Beispiel haben wir

$$ad - bc = 8 - 9 = -1 \neq 0.$$

Also ist A invertierbar, und es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kapitel verfasst von:

2026: Anastasia von Stackelberg
2019: Konstantin Meiwald