11 Schulmathematik II

Zwei der zentralsten Themen, wenn nicht sogar die zentralsten Themen der Schulanalysis, sind die Differential- und Integralrechnung. Beiden möchten wir uns in diesem Kapitel widmen, um die Kenntnisse aus der Schule in unsere Erinnerung zu rufen und um sicher mit den entsprechenden Methoden der Themengebiete umgehen zu können.

11.1 Differentialrechnung

Beginnen wir mit der Betrachtung der Differentialrechnung. Ihre typischen Anwendungsgebiete sind die Berechnungen von Änderungsraten, Approximationen oder von Extremstellen.
Eine ausführliche Definition und Diskussion kann nur die Analysis-Vorlesung leisten, denn zur adäquaten und formal korrekten Auseinandersetzung fehlen uns leider noch einige Werkzeuge. In der Vorlesung bleibt dann aber für das Einüben von Rechenroutinen und die Auseinandersetzung mit verschiedenen Bedeutungen (z.B. von Ableitungen) nur wenig Zeit. Ziel dieses Kapitels sind deshalb die Auseinandersetzung mit den zentralen Interpretationen der Ableitung auf anschaulicher Ebene, sowie die Wiederholung und Übung der Rechentechniken.

11.1.1 Ableitungen anschaulich

Als erstes geben wir eine Arbeitsdefinition, die für unsere Zwecke vorerst ausreicht:

Definition 11.1
Die Ableitung f' zu einer Funktion f ist diejenige Funktion, die an jeder Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich von f die Steigung (oder auch momentane Änderungsrate) der Funktion angibt. Wir sagen, dass $f'(x_0)$ die Steigung der Funktion f in x_0 ist.

Diesen Aspekt der Steigung bzw. der Änderungsrate aus der Definition wollen wir uns nun in Abbildung 11.1 erst einmal geometrisch vor Augen führen.
Die Suche nach der Steigung einer Funktion an einer Stelle x_0 führt uns unweigerlich über Sekantensteigungen in einer gewissen Umgebung um die Stelle x_0.

Analytisch beschreibt der Quotient

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0,\, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x,\, f(x_0 + \Delta x))$, wie auch auf der obigen Abbildung 11.1 zu sehen ist. Der Quotient spiegelt nichts

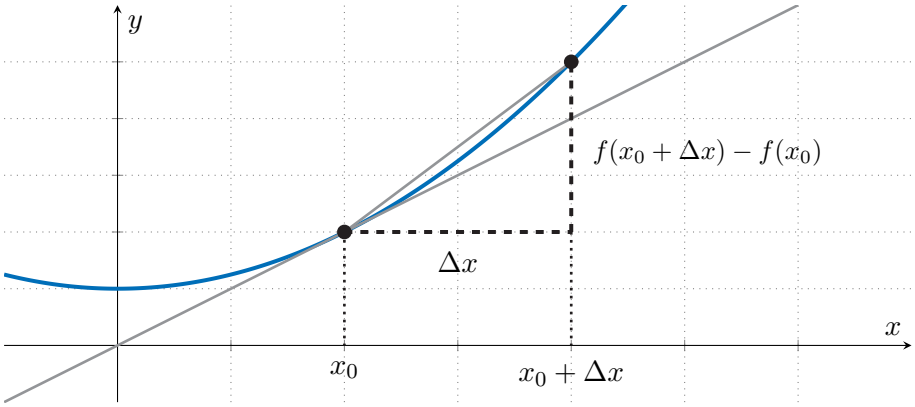


Abbildung 11.1: Geometrische Interpretation der Ableitung

anderes wieder als ein Steigungsdreieck, wie es z.B. bei den linearen Funktionen zur Bestimmung der Steigung eingesetzt wird.
Anschaulich berechnen wir die Steigung an der Stelle x_0 dadurch, dass wir Δx immer kleiner werden lassen und sich die Sekanten dadurch immer mehr der Tangente an f an der Stelle x_0 annähern.

In der Schule wird der Ableitungsbegriff vermehrt auch mit der lokalen Änderungsrate oder der Momentangeschwindigkeit in Verbindung gebracht. Die lokale Änderungsrate ist nichts anderes als eine Modellgröße, die zur Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion eingesetzt wird (und das eben oftmals am Beispiel der Geschwindigkeit, wie auch in folgender Tabelle).

$f(x_0)$	Zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt x_0
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	Zurückgelegter Weg in der Zeit von x_0 bis $x_0 + \Delta x$
$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$
$f'(x_0)$	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0

Zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit berechnen wir dementsprechend die passenden Durchschnittsgeschwindigkeiten in immer kleiner werdenden Zeitintervallen. Das entspricht anschaulich wiederum genau dem bereits eben beschriebenen Übergang von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung.

11.1.2 Ableitungsregeln

Zurück zu den Ableitungen als solche. Im Folgenden geht es jetzt vermehrt um die Einübung von Rechenroutinen und auch um das Verständnis der Ableitungsregeln.

Die folgende Tabelle beinhaltet die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen, auf die wir im Vortrag und auch in der Übung einige Male zurückgreifen werden.

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Die Liste erhebt natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit (und insbesondere die letzten vier Funktionen werden an späterer Stelle noch ausführlich behandelt), genügt aber für unsere Zwecke. Denn mithilfe der folgenden Ableitungsregeln ist es uns möglich auch die Ableitungen komplizierter Funktionen aus den Ableitungen der elementaren Funktionen zu berechnen.

Satz 11.2 (Ableitungsregeln)
Seien f, g zwei (differenzierbare) Funktionen und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ — Summenregel
2. $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ — Faktorregel
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ — Produktregel
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, — Quotientenregel
   falls $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich.

Auch wenn wir hier keinen Beweis führen, so werden wir die Produkt- und Quotientenregel später im Kapitel und in der Übung noch nachweisen.

Beispiele: Mithilfe der elementaren Ableitungen und den Ableitungsregeln können wir uns nun ein paar schwierigeren Beispielen widmen.

1. Es gilt:

$$(3x^5 + 2x + \cos x)' = (3x^5)' + (2x)' + (\cos x)' = 15x^4 + 2 - \sin x$$

2. Es gilt:

$$\begin{aligned}((5x^3-2x)(2x))' &= (5x^3-2x)'\cdot 2x + (5x^3-2x)\cdot(2x)' \\ &= (15x^2-2)\cdot 2x + (5x^3-2x)\cdot 2 \\ &= 30x^3 - 4x + 10x^3 - 4x \\ &= 40x^3 - 8x\end{aligned}$$

3. Es gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' &= \frac{(x)'\cdot(1+x^2) - x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

4. Es gilt:

$$\begin{aligned}(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

   Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras, der besagt, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir als Ableitung des Tangens auch noch den alternativen Ausdruck

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Neben den bereits besprochenen Verknüpfungen behandeln wir nun noch eine weitere Art: die Komposition. Hier ein paar Beispiele.

Beispiele:

1. Seien $f(x) = x^3$ und $g(x) = \cos(x)$. Dann ist
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(x^3)$$
2. Seien $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Auch für diesen Typ von Funktionen steht eine Ableitungsregel zur Verfügung. Wir werden sehen, dass diese Regel sehr mächtig ist.

Satz 11.3 (Kettenregel)
Für die Komposition zweier Funktionen f und g gilt:
$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Auf den Beweis der Kettenregel verzichten wir an dieser Stelle, geben aber auch hier ein Beispiel:

Beispiel: Seien $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$.
Wir berechnen die Ableitung von $g \circ f = \sin(x^2)$. Es ist
$$(\sin(x^2))' = (g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x\,.$$

Wie bereits erwähnt ist die Kettenregel sehr mächtig. So lassen sich zum Beispiel sowohl die Produkt- als auch die Quotientenregel mithilfe der Kettenregel (elegant) herleiten, was an dieser Stelle aber nicht näher betrachtet werden soll.

Zum Abschluss der Differentialrechnung betrachten wir noch ein Beispiel, wie sich Funktionen zum Teil sehr elegant mit der Kettenregel ableiten lassen. Es kann also sehr zeitsparend sein die Kettenregel anzuwenden, bevor man „blind“ Klammern auflöst.
$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$
Die Ableitung des Nenners ist nach Kettenregel $((1+x^2)^2)' = 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x$. Wenden wir nun die Quotientenregel auf die Ausgangsfunktion an, können wir kürzen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x^2)^2 - x \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{[(1+x^2)^2]^2} \\ &= \frac{(1+x^2) \cdot ((1+x^2) - 4x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

11.2 Integralrechnung

In gewisser Weise die Inverse zur Differentialrechnung ist die Integralrechnung. Diese findet nicht nur innermathematisch Anwendung, sondern wird auch in vielen anderen Wissenschaften, z. B. der Physik, verwendet. Sie beschäftigt sich mit dem Problem der Berechnung von Flächen unter einem Graphen.

11.2.1 Worum geht es?

Unser Ziel bei der Integration ist es, den orientierten Flächeninhalt, der von dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zwischen zwei x-Werten a und b, eingeschlossen wird, zu bestimmen. „Orientiert“ heißt hierbei, dass Fläche unterhalb der x-Achse als negativ, und Fläche oberhalb der x-Achse als positiv gewertet wird.
Für diesen orientierten Flächeninhalt schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Beispiel 11.4

1) Als erstes betrachten wir die durch $f(x) = 2$ gegebene Funktion und wollen den orientierten Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen bestimmen, die von den Grenzen $a = 1$ und $b = 5$ beschränkt wird.

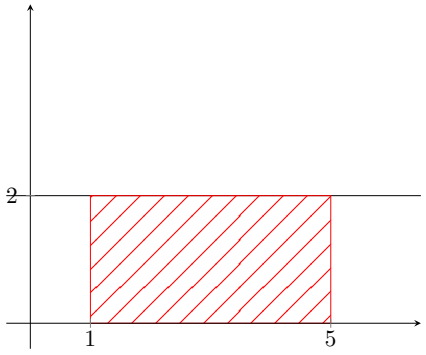


Abbildung 11.2: Skizze der zu berechnenden Fläche

Diese Fläche ist ein Rechteck, der Flächeninhalt beträgt also:

$$\int_1^5 2\,dx = \underbrace{4}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Höhe}} = 8$$

2) Als nächstes betrachten wir $f(x) = x$ und die Grenzen $a = -1$ und $b = 2$.

Die Fläche A_- unter der x-Achse ist ein Dreieck von Breite und Höhe jeweils 1, also ist $A_- = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Die Fläche A_+ über der x-Achse ist ein Dreieck

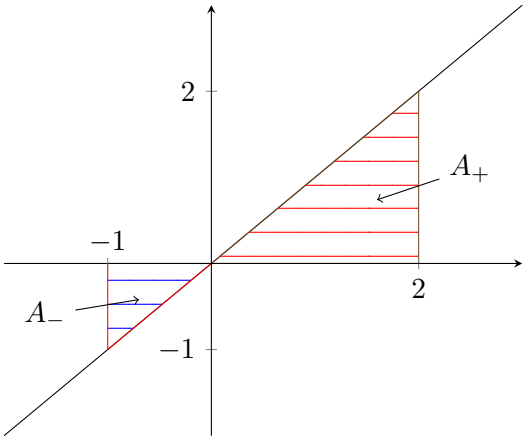


Abbildung 11.3: Skizze der hier zu berechnenden Fläche

von Breite und Höhe jeweils 2, also ist $A_- = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Insgesamt erhalten wir also für den orientierten Flächeninhalt

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = A_+ - A_- = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Leider gehören diese beiden Funktionen zu den ganz wenigen, bei denen sich die Integrale mit elementargeometrischen Methoden ausrechnen lassen. Schon bei $f(x) = x^2$ kommen wir mit solchen Überlegungen nicht weiter. Glücklicherweise gibt es eine schöne Theorie, mit der sich auch einige schwierigere Integrale ausrechnen lassen.

11.2.2 Integrale von (fast) beliebigen Funktionen

Vorbemerkung:

1) Für den Rest dieses Kapitels sollen $a < b$ feste reelle Zahlen sein.

2) Im Folgenden wollen wir nur **stetige** Funktionen betrachten. Stetigkeit ist mit unseren Mitteln etwas schwierig zu definieren, daher beschränken wir uns auf die anschauliche Definition, dass der „Graph der Funktion keine Sprünge haben soll“. Die meisten Funktionen, die wir bis jetzt kennen, sind stetig. Wir nehmen ab jetzt immer an, dass alle auftretenden Funktionen stetig sind.
Außerdem werden wir noch andere Bedingungen an unsere Funktionen stellen, z.B. Differenzierbarkeit. (Eine Funktion ist differenzierbar, falls die Ableitung überall existiert. Stetigkeit folgt hieraus, muss also manchmal nicht extra vorausgesetzt werden.) Diese können für die Zwecke dieses Vorkurses vernachlässigt werden und werden in der Analysis genauer betrachtet. Sie werden hier aber angegeben, damit die Aussagen korrekt sind. Diese Bedingungen sind die Ursache für das „fast“ in der Überschrift.

Wie oben schon angedeutet, ist Integration in einem gewissen Sinne das Gegenteil der Ableitung. Daher erst einmal folgende Definition:

Definition 11.5
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Beispiel 11.6
Wir betrachten die durch $f(x) = x^2$ gegebene Funktion. Durch geschicktes Hinsehen kann man erkennen, dass durch $F(x) = \frac{x^3}{3}$ eine Stammfunktion gegeben wird, denn nach den gelernten Rechenregeln ist $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Eine weitere Stammfunktion ist beispielsweise durch $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ gegeben, da die 1 beim Ableiten wegfällt.

Wir sehen hier, dass die Stammfunktion einer Funktion f nicht eindeutig seien muss. Man kann aber zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen F und G nur um eine Konstante unterscheiden, d.h. es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $F(x) = G(x) + c$ für alle x gilt.

In Abschnitt 11.1 haben wir folgende Ableitungstabelle gesehen:

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^a	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Diese können wir leicht zu einer Stammfunktionstabelle umfunktionieren, indem wir f durch F und f' durch f ersetzen:

$F(x)$	$f(x)$
1	0
x	1
$\frac{x^2}{2}$	x
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	x^a (für $a \neq -1$)
$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$-\cos x$	$\sin x$

(Hier wurden die Funktionen teilweise mit Konstanten multipliziert, damit die Funktionen auf der rechten Seite normiert sind.)

Für stetige Funktionen gibt es folgenden wichtigen Satz (ohne Beweis):

Satz 11.7
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann hat f eine Stammfunktion.

Bemerkung: Der Satz garantiert nur, dass es eine Stammfunktion gibt, liefert aber keinen Weg, eine zu bestimmen. Tatsächlich gibt es, im Gegensatz zu Ableitungen, keinen allgemeinen Weg, eine Stammfunktion zu einer mit elementaren Funktionen gegebenen Funktion zu bestimmen, sondern muss meistens über „geschicktes Hinsehen“ ermittelt werden.

Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, wie sich Integrale explizit ausrechnen lassen. Die Antwort darauf liefert der folgende Satz.

Satz 11.8 (Hauptsatz (HS))
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Die Theorie der Integralrechnung beinhaltet eine schöne Herleitung, welche deutlich macht, weshalb man mit der im Hauptsatz formulierten Formel gerade den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse berechnet. An dieser Stelle möchten wir uns allerdings auf die Anwendung der Berechnungsmethode beschränken und diese üben. Dazu betrachten wir nun folgende Beispiele.

Beispiel 11.9

1) Als erstes überprüfen wir, dass die Formel für die durch $f(x) = x$ gegebene Funktion, welche wir bereits in Beispiel 11.4 betrachtet hatten, das richtige Ergebnis liefert. Dort hatten wir $\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{3}{2}$ ausgerechnet. Eine Stammfunktion von f ist nach Beispiel 11.6 durch $F(x) = \frac{x^2}{2}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (Satz 11.8) gilt nun:
$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}.$$
Also ergibt unser Satz das richtige Ergebnis.
Das Ergebnis überzeugt uns also von der Richtigkeit des Hauptsatzes. Es sei aber dazu gesagt, dass dies keineswegs einen Beweis ersetzt! Die Betrachtung von Beispielen ist nur geeignet, um ein erstes Gefühl zu entwickeln.

2) Als nächstes wollen wir das Integral $\int_1^5 e^x\,dx$ ausrechnen. Wenn wir $f(x) = e^x$ setzen, wird nach Beispiel 11.6 durch $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f gegeben. Nach dem Hauptsatz (Satz 11.8) gilt nun:
$$\int_1^5 e^x\,dx = e^5 - e^1.$$

11.2.3 Rechenregeln – Linearität

Integrale sind im folgendem Sinne **linear**[1]:

Satz 11.10 (Linearität der Stammfunktion)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$i) \qquad \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$ii) \qquad \int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis:

i) Sei F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von g. Dann ist nach der Summenregel für Ableitungen $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$,

[1] Was dies mit den linearen Abbildungen aus der Linearen Algebra, welche wir in Kapitel 14 kennenlernen werden, zu tun hat, sieht man besser mit folgender Notation: Sei $C([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Dann können wir die Integration I als Abbildung $I : C([a, b]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ auffassen. Satz 11.10 sagt dann einfach $I(f + g) = I(f) + I(g)$ und $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$, was genau der Definition aus der linearen Algebra entspricht (bis auf die Tatsache, dass I nicht von $\mathbb{R}^2$ in sich selbst abbildet).

d.h. $F+G$ ist eine Stammfunktion von $f+g$. Nach dem Hauptsatz (Satz 11.8) gilt damit:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) \\ &= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Teil.

ii) Dies geht ähnlich und ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel 11.11

Wir wollen das Integral $\int_1^5 (2+3e^x)\,dx$ berechnen, indem wir es mittels Linearität auf bereits bestimmte Integrale zurückführen. Es ist:

$$\int_1^5 (2+3e^x)\,dx \overset{i)}{=} \underbrace{\int_1^5 2\,dx}_{=8} + \int_1^5 3e^x\,dx \overset{ii)}{=} 8 + 3\underbrace{\int_1^5 e^x\,dx}_{=e^5-e^1} = 8+3e^5-3e^1$$

Kapitel verfasst von:

2022: Anton Getz, Niklas Müller
2019: Kira Rohlmann, Konstantin Meiwald