Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Schulmathematik II

– Differentialrechnung –

× Aufgabe 1: Ableitungsregeln (1)

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Lösung: $f'(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$

Lösung: $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x^4}$

c) $f(z) = a \cdot z^4 + \frac{b}{z^3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(z) = 4az^3 - \frac{3b}{z^4}$

d) $f(t) = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(t) = x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t)$

× Aufgabe 2: Ableitungsregeln (2)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Produkt- bzw. Quotientenregel.

a) $f(t) = t^2 \cdot \sin(t)$

Lösung: $f'(t) = t(2\sin(t) + t\cos(t))$

b) $f(a) = (a^2 - 1) \cdot (1 + a^2)$

Lösung: $f'(a) = 4a^3$ *(vorheriges Ausmultiplizieren vereinfacht die Aufgabe enorm)*

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$, wobei $x^2+x+1 \neq 0$

Lösung: $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$

d) $f(s) = -\dfrac{s^2+4s+5}{s^3}$, wobei $s \neq 0$

Lösung: $f'(s) = \dfrac{s^2+8s+15}{s^4}$

Aufgabe 3: Kettenregel

Nutze die Kettenregel zur Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = (2t+1)^3$

Lösung: $f'(t) = 6(2t+1)^2$

b) $f(x) = \sin(ax+b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(x) = a\cos(ax+b)$

Aufgabe 4: Gemischte Übungen zu Ableitungen

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit Hilfe dazu passender Ableitungsregeln.

a) $f(x) = \exp(4-x^2)$

Lösung: $f'(x) = -2x \cdot exp(4-x^2)$

b) $f(s) = \ln(2) \cdot s^5 + 3 \cdot \ln(s)$

Lösung: $f'(s) = ln(2) \cdot 5 \cdot s^4 + 3 \cdot \dfrac{1}{s}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{3x-2}$

Lösung: $f'(x) = -\dfrac{12}{(3x-2)^2}$

d) $f(t) = (\dfrac{1}{2}t^2 + 2t) \cdot (t-1)$

Lösung: $f'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 3t - 2$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Lösung: $f'(x) = \dfrac{cos(x) \cdot x - sin(x)}{x^2}$

Aufgabe 5: Herleitung eines Spezialfalls der Quotientenregel

Sei g eine differenzierbare Funktion und $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Zur Vorbereitung der Herleitung der Quotientenregel wollen wir den Spezialfall der Quotientenregel zeigen, nämlich

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Hinweis: Mit $f(x) = \frac{1}{x}$ können wir $\frac{1}{g(x)}$ schreiben als

$$\frac{1}{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)\,.$$

Nutze die Kettenregel, um den Spezialfall der Quotientenregel zu beweisen.

Lösung: Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ *ist hierbei*

$$f'(x) = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Also folgt mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f \circ g)' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x) \\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

! Aufgabe 6: Herleitung der Produktregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Hinweis: Wir wollen diese Regel mit Hilfe der Kettenregel beweisen. Dafür suchen wir also eine verkettete Funktion, die wir ableiten können, die gleichzeitig aber auch ein Produkt von Funktionen enthält.
Bei dieser Suche werden wir bei den binomischen Formeln fündig. Betrachten wir die verkettete Funktion $(f + g)^2$:

$$(f + g)^2 = f^2 + 2(f \cdot g) + g^2$$

Beweise nun die Produktregel mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln (Kettenregel, Summenregel und Faktorregel).

Lösung: Leiten wir nun beide Seiten der Gleichung mit der Kettenregel (und der Summen- bzw. Faktorregel) ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & 2(f+g)\cdot(f'+g') = 2f\cdot f' + 2(f\cdot g)' + 2g\cdot g' \\ \Rightarrow \quad & (f+g)(f'+g') = f\cdot f' + (f\cdot g)' + g\cdot g' \\ \Rightarrow \quad & f\cdot f' + f\cdot g' + g\cdot f' + g\cdot g' = f\cdot f' + (f\cdot g)' + g\cdot g' \\ \Rightarrow \quad & f\cdot g' + g'\cdot f = (f\cdot g)' \end{aligned}$$

! Aufgabe 7: Herleitung der Quotientenregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen und sei $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Beweise die Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$.
Hinweis: Die Produktregel und die Kettenregel dürfen vorausgesetzt werden.
Lösung: Zunächst ziehen wir den Bruch auseinander

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die Produktregel an. Den zweiten Ausdruck können wir mit der Kettenregel ableiten
(Dies wurde auch als Spezialfall der Quotientenregel in einer vorherigen Aufgabe behandelt.)

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot(-1)\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

– Integralrechnung –

× Aufgabe 8: Integrale berechnen I

Berechne folgende Integrale.

i)

$$\int_{-3}^{3} x^3 \, dx$$

Lösung:

$$\int_{-3}^{3} x^3 \, dx = 0$$

ii)

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2} \, dx$$

Lösung:

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{4}{5}$$

iii)

$$\int_{0}^{1} e^{2x} \, dx$$

Lösung:

$$\int_{0}^{1} e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

iv)

$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1 \, dx$$

Lösung:

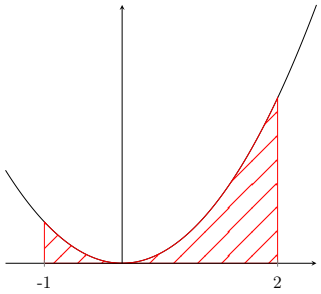
$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1 \, dx = 108$$

Berechne folgende Integrale. Mache zuerst eine Skizze und gebe (ohne Rechnung) an, welches Vorzeichen das Integral hat.

v)

$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$$

Lösung:



Am Bild ist zu sehen, dass $\int_{-1}^{2} x^2\,dx > 0$.

Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = x^2$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = \frac{x^3}{3}$ *gegeben. Damit ist*

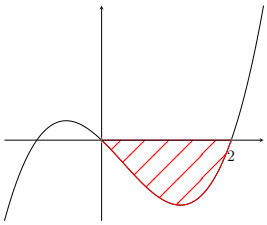
$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

vi)

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$

Hinweis: Benutze $x^3 - x^2 - 2x = (x-2)\cdot x \cdot (x+1)$ *für die Skizze*

Lösung:



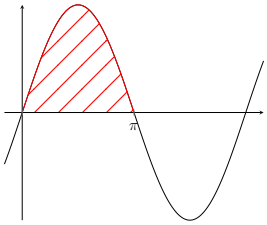
Am Bild ist zu sehen, dass $\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)\,dx < 0$.
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} - 0^2\right) = -\frac{8}{3}.$$

vii)

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

Lösung:



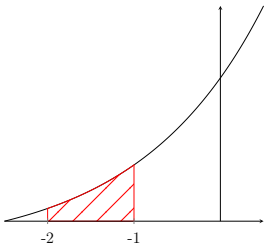
Am Bild ist zu sehen, dass $\int_0^\pi \sin(x)\,dx > 0$.
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = \sin(x)$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = -\cos(x)$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

viii)

$$\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx$$

Lösung:



Am Bild ist zu sehen, dass $\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx > 0$
Eine Stammfunktion von der durch $f(x) = 2^x = e^{ln(2)x}$ *gegebenen Funktion ist durch* $F(x) = \frac{1}{\ln(2)} e^{ln(2)x} = \frac{1}{\ln(2)} 2^x$ *gegeben. Damit ist*

$$\int_{-2}^{-1} 2^x\,dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^{-1} - \frac{1}{\ln(2)} 2^{-2} = \frac{1}{4\ln(2)}$$

! Aufgabe 9: Partielle Integration

! (a) Zeige folgenden Satz über Integration:

Satz I (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit g stetig differenzierbar[1], und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Hinweise:

Die Produktregel für Ableitungen kann als bekannt vorausgesetzt werden. Nutze Sie als Ausgangspunkt und leite aus ihr die Regel zur partiellen Integration her.

Für zwei stetige Funktionen $h, k : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt: Wenn $h(x) = k(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt $\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b k(x)\, dx$.

Lösung: Nach der Produktregel gilt

$$(F \cdot g)'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \overset{F'=f}{=} f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x).$$

Durch Abziehen von $F(x) \cdot g'(x)$ erhalten wir daraus

$$f(x) \cdot g(x) = (F \cdot g)'(x) - F(x) \cdot g'(x)$$

Daraus und mit dem Wissen, dass Integrale linear sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx &= \int_a^b \left((F \cdot g)'(x) - F(x) \cdot g'(x)\right)\, dx \\ &\overset{Lin.}{=} \int_a^b (F \cdot g)'(x)\, dx - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx.\end{aligned}$$

Nach Definition ist $F \cdot g$ eine Stammfunktion von $(F \cdot g)'$. Daher gilt nach dem Hauptsatz aus dem Vortrag:

$$\int_a^b (F \cdot g)'(x)\, dx = F(b)g(b) - F(a)g(a)$$

Setzen wir dies in die Gleichung davor ein, so erhalten wir

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx,$$

was zu zeigen war.

[1] D.h. g differenzierbar mit g' stetig

(b) Berechne unter Verwendung von Satz I *(Partielle Integration)* folgende Integrale:

i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx &\overset{PI}{=} \underbrace{\pi \cdot (-\cos(\pi)) - (-\pi) \cdot (-\cos(-\pi))}_{=2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx \\ &\overset{HS}{=} 2\pi + \sin(\pi) - \sin(-\pi) \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\, dx$$

Hinweis: Mehrfache partielle Integration

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\, dx &= \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx \\ &\overset{PI}{=} \underbrace{1^2(-e^{-1}) - 0^2(-e^0)}_{=-e^{-1}} + \int_0^1 2xe^{-x}\, dx \\ &\overset{PI}{=} \underbrace{-e^{-1} + (2 \cdot 1(-e^{-1}) - 2 \cdot 0(-e^0))}_{=-3e^{-1}} + \int_0^1 2e^{-x} \\ &\overset{HS}{=} -3e^{-1} + (2(-e^{-1})) - 2(-e^0)) \\ &= 2 - 5e^{-1}\end{aligned}$$

iii)

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\, dx &= \int_1^2 1 \cdot \ln(x)\, dx \\ &\overset{PI}{=} 2\ln(2) - 1\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \int_1^2 x\frac{1}{x}\, dx \\ &= 2\ln(2) - \int_1^2 1\, dx \\ &\overset{HS}{=} 2\ln(2) - 1\end{aligned}$$

! iv)

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

Hinweis: Verwende $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)\,dx \\
&\overset{PI}{=} -\cos(\pi)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + \cos(0)\underbrace{\sin(0)}_{=0} + \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx \\
&= \int_0^\pi (1 - \sin^2(x))\,dx \\
&= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \\
&= \pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \\
\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \pi \\
\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10: Linearität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$

und vervollständige damit den Beweis des Satzes zur Linearität von Integralen.
Lösung: Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Nach der Faktorregel ist $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$, also ist λF eine Stammfunktion von λf. Damit gilt nun:

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx \overset{HS}{=} \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) \overset{HS}{=} \lambda \int_a^b f(x)\,dx,$$

was zu zeigen war. □

! Aufgabe 11: Integration durch Substitution

! a) Zeige folgenden Satz über Integration:

Satz II (Integration durch Substitution)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $s : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\, dx = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\, dx$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel. Falls F eine Stammfunktion von f ist, wie könnte man das rechte Integral schreiben?
Lösung: Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt nach der Kettenregel $(F \circ s)'(x) = (f \circ s)(x) \cdot s'(x)$.
Damit haben wir

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\, dx = \int_a^b (F \circ s)'(x)\, dx \overset{HS}{=} F(s(b)) - F(s(a)) \overset{HS}{=} \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\, dx.$$

□

b) Berechne unter Verwendung von Satz II *(Integration durch Substitution)*:

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx$$

Lösung: Benutze Integration durch Substitution mit $s(x) = x^2$. Damit ist

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx \overset{Subst}{=} \int_0^4 e^x\, dxe^4 - 1 \overset{HS}{=} e^4 - 1$$