Vorkurs Mathematik 2026 | Aufgaben zum Thema

Schulmathematik II

– Differentialrechnung –

× Aufgabe 1: Ableitungsregeln (1)

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$, wobei $x \neq 0$

c) $f(z) = a \cdot z^4 + \frac{b}{z^3}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $f(t) = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

× Aufgabe 2: Ableitungsregeln (2)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit der Produkt- bzw. Quotientenregel.

a) $f(t) = t^2 \cdot \sin(t)$

b) $f(a) = (a^2 - 1) \cdot (1 + a^2)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$, wobei $x^2 + x + 1 \neq 0$

d) $f(s) = -\frac{s^2 + 4s + 5}{s^3}$, wobei $s \neq 0$

×= Wichtige Aufgabe

!= Schwierige Aufgabe

Aufgabe 3: Kettenregel

Nutze die Kettenregel zur Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = (2t+1)^3$

b) $f(x) = \sin(ax+b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Gemischte Übungen zu Ableitungen

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen mit Hilfe dazu passender Ableitungsregeln.

a) $f(x) = \exp(4 - x^2)$

b) $f(s) = \ln(2) \cdot s^5 + 3 \cdot \ln(s)$

c) $f(x) = \dfrac{4}{3x-2}$

d) $f(t) = (\dfrac{1}{2}t^2 + 2t) \cdot (t-1)$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Aufgabe 5: Herleitung eines Spezialfalls der Quotientenregel

Sei g eine differenzierbare Funktion und $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Zur Vorbereitung der Herleitung der Quotientenregel wollen wir den Spezialfall der Quotientenregel zeigen, nämlich

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Hinweis: Mit $f(x) = \frac{1}{x}$ können wir $\frac{1}{g(x)}$ schreiben als

$$\frac{1}{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)\,.$$

Nutze die Kettenregel, um den Spezialfall der Quotientenregel zu beweisen.

! Aufgabe 6: Herleitung der Produktregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Hinweis: Wir wollen diese Regel mit Hilfe der Kettenregel beweisen. Dafür suchen wir also eine verkettete Funktion, die wir ableiten können, die gleichzeitig aber auch ein Produkt von Funktionen enthält.
Bei dieser Suche werden wir bei den binomischen Formeln fündig. Betrachten wir die verkettete Funktion $(f + g)^2$:

$$(f + g)^2 = f^2 + 2(f \cdot g) + g^2$$

Beweise nun die Produktregel mit Hilfe der bereits bekannten Ableitungsregeln (Kettenregel, Summenregel und Faktorregel).

! Aufgabe 7: Herleitung der Quotientenregel

Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen und sei $g(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Beweise die Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.
Hinweis: Die Produktregel und die Kettenregel dürfen vorausgesetzt werden.

– Integralrechnung –

× Aufgabe 8: Integrale berechnen I

Berechne folgende Integrale.

i)
$$\int_{-3}^{3} x^3 \, dx$$

ii)
$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x^2} \, dx$$

iii)
$$\int_{0}^{1} e^{2x} \, dx$$

iv)
$$\int_{-2}^{4} 2x^3 - 3x + 1 \, dx$$

Berechne folgende Integrale. Mache zuerst eine Skizze und gebe (ohne Rechnung) an, welches Vorzeichen das Integral hat.

v)
$$\int_{-1}^{2} x^2 \, dx$$

vi)
$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x) \, dx$$

Hinweis: Benutze $x^3 - x^2 - 2x = (x-2) \cdot x \cdot (x+1)$ *für die Skizze*

vii)
$$\int_{0}^{\pi} \sin(x) \, dx$$

viii)
$$\int_{-2}^{-1} 2^x \, dx$$

! Aufgabe 9: Partielle Integration

! (a) Zeige folgenden Satz über Integration:

Satz I (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit g stetig differenzierbar[1], und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Hinweise:

Die Produktregel für Ableitungen kann als bekannt vorausgesetzt werden. Nutze Sie als Ausgangspunkt und leite aus ihr die Regel zur partiellen Integration her.

Für zwei stetige Funktionen $h, k : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt: Wenn $h(x) = k(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt $\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b k(x)\, dx$.

(b) Berechne unter Verwendung von Satz I *(Partielle Integration)* folgende Integrale:

i)
$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx$$

ii)
$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\, dx$$

Hinweis: Mehrfache partielle Integration

iii)
$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$

! iv)
$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx$$

Hinweis: Verwende $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Aufgabe 10: Linearität

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx,$$

und vervollständige damit den Beweis des Satzes zur Linearität von Integralen.

[1] D.h. g differenzierbar mit g' stetig

! Aufgabe 11: Integration durch Substitution

! a) Zeige folgenden Satz über Integration:

Satz II (Integration durch Substitution)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $s : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(s(x)) \cdot s'(x)\, dx = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x)\, dx$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel. Falls F eine Stammfunktion von f ist, wie könnte man das rechte Integral schreiben?

b) Berechne unter Verwendung von Satz II *(Integration durch Substitution)*:

$$\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx$$