10 Funktionen und Abbildungen II

Im Kapitel „Funktionen und Abbildungen I“ konnten wir bereits verstehen, was Abbildungen und Funktionen allgemein sind. Nun möchten wir uns ein genaueres Bild von Abbildungen, Funktionen und ihren Graphen machen. Dazu müssen wir uns zunächst mit Eigenschaften auseinandersetzen, welche essentiell für das Arbeiten mit Abbildungen sind. Die Rede ist von der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Wir werden Abbildungen nach diesen Eigenschaften klassifizieren und lernen, wie man konkrete Abbildungen auf diese untersuchen kann. Nicht zuletzt für die Betrachtung von Umkehrabbildungen, welche wir im Anschluss einführen, werden Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von Relevanz sein.

10.1 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

In diesem Unterkapitel möchten wir drei elementare Eigenschaften von Abbildungen einführen: die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Diese drei Eigenschaften sind sehr abstrakt, weshalb alle Abbildungen auf diese untersucht werden können. Wichtig sind sie darüberhinaus, da sie etwa als Kriterium für die Existenz einer Umkehrabbildung auftauchen (vgl. Kapitel 10.4) oder da mit diesen Eigenschaften Mengen miteinander verglichen werden können (vgl. Kapitel 10.2). Darüber hinaus tauchen diese Begriffe in vielen weiteren Situationen auf, welche in diesem Skript aber nicht alle behandelt werden können.
Beginnen wir mit der Betrachtung der Injektivität.

Definition 10.1 (Injektivität)
Seien M und N zwei Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \; .$$

Bemerkung: Eine äquivalente Formulierung der Definition der Injetivität lautet:
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

Jedes Element des Wertevorrats von f wird also *höchstens einmal* angenommen.

Gewissermaßen das Gegenstück zur Injektivität ist die Surjektivität. Wir betonen an dieser Stelle aber, dass eine Funktion nicht entweder injektiv oder surjektiv sein

muss! Es gibt Funktionen, die weder injektiv noch surjektiv sind, während andere beide Eigenschaften besitzen und wieder andere genau eine von beiden Eigenschaften erfüllen.

Definition 10.2 (Surjektivität)
Seien M und N zwei Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, falls gilt:

$$f(M) = N$$

Bemerkung: Eine äquivalente Formulierung der Definition der Surjektivität lautet:
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt surjektiv, falls für alle $y \in N$ mindestens ein $x \in M$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt.
In kurz: $f : M \to N$ surjektiv $\Leftrightarrow \forall\, y \in N\ \exists\, x \in M : f(x) = y$.
Jedes Element des Wertevorrats von f wird also *mindestens einmal* angenommen – oder wie in der Definition formuliert: Das Bild $f(M)$ von f und der Wertevorrat N von f müssen übereinstimmen.

Falls eine Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv ist, nennt man diese „bijektiv“:

Definition 10.3 (Bijektivität)
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung: Eine Abbildung f heißt also bijektiv, wenn es zu *jedem* Element y aus dem Wertevorrat *genau ein* Element x aus dem Definitionsbereich gibt, sodass $f(x) = y$ gilt.

Beispiel: Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ bijektiv ist.

Eine Funktion ist der Definition nach bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Injektivität Zu zeigen ist: Falls für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x) = f(y)$ ist, so folgt $x = y$.

Seien also $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Nach Definition von f ist dies äquivalent dazu, dass $2x = 2y$ gilt, woraus $x = y$ folgt (mittels Division beider Seiten der Gleichung durch 2).

Surjektivität Zu zeigen ist: Für jedes $y \in \mathbb{R}$ (hier ist $\mathbb{R}$ der Wertevorrat von f) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ (hier ist $\mathbb{R}$ der Definitionsbereich von f), sodass $f(x) = y$ gilt.

Es sei dazu $y \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun zeigen, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt. Dazu setzen wir die Abbildungsvorschrift ein und formen um:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

Also erfüllt $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$, die zu zeigende Gleichung $f(x) = y$ – da $y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, ist die Surjektivität von f gezeigt.

10.2 Vergleich der Mächtigkeiten von Bild- und Urbildmengen

Wie bereits angedeutet lassen sich mit Hilfe der Injektivität und Surjektivität Vergleiche zwischen Mächtigkeiten von Mengen herstellen – genauer zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat einer Abbildung. Mit Hilfe der Injektivität lässt sich folgendes Lemma formulieren:

Lemma 10.4 (Mächtigkeitenvererbung bei injektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \leq \#N$

Beweis: Für $\#N = \infty$ ist das Lemma trivial, da jede Zahl und auch unendlich selbst kleiner oder gleich unendlich ist.
Sei nun $\#N < \infty$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Elemente $a_1, ..., a_n \in N$, sodass gilt: $N = \{a_1, ..., a_n\}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(N) = f^{-1}(\{a_1, ..., a_n\}) \overset{\text{Übung}}{=} f^{-1}(\{a_1\}) \cup ... \cup f^{-1}(\{a_n\}) \\ \Rightarrow \#M &= \#(f^{-1}(\{a_1\}) \cup ... \cup f^{-1}(\{a_n\})) \overset{(*)}{\leq} \#f^{-1}(\{a_1\}) + ... + \#f^{-1}(\{a_n\}) \\ &\overset{\text{f injektiv}}{\leq} \underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} = n = \#N \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma vollständig gezeigt. Die Ungleichung $(*)$ haben wir bereits auf dem Übungszettel zur Mengenlehre bewiesen. □

Über die Injektivität von Abbildungen kann also die Mächtigkeit des Wertebereichs nach unten bzw. des Definitionsbereiches nach oben abgeschätzt werden. Die andere Richtung liefert die Surjektivität.

Lemma 10.5 (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Bemerkung: Für eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ ergibt sich damit $\#M = \#N$.

10.3 Ausblick – Messen von Unendlichkeit

Aus der Definition einer bijektiven Abbildung kann direkt ein großer Nutzen für die differenziertere Betrachtung des Unendlichen hergeleitet werden. Hier stellt man

sich die Frage: „Ist wirklich jedes Unendlich gleich groß?“ Beispielsweise haben die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ zwar beide unendlich viele Elemente, aber trotzdem scheint $\mathbb{R}$ viel größer.

Definition 10.6 (Abzählbarkeit von Mengen)
Eine Menge M heißt

- **höchstens abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.
- **abzählbar unendlich**, wenn sogar eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ existiert – in diesem Fall gilt $\#M = \infty$.
- **überabzählbar**, wenn es keine injektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt – in diesem Fall gilt ebenfalls $\#M = \infty$.

Bemerkung:

- Der Begriff **abzählbar** wird oft synonym zu höchstens abzählbar, manchmal aber auch synonym zu abzählbar unendlich verwendet.
- Die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar (sogar abzählbar unendlich) und die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind überabzählbar. Insbesondere sind mit diesem Verständnis der Mächtigkeit die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig – auch wenn es beispielsweise in $\mathbb{Q}$ natürlich deutlich mehr Elemente gibt als in $\mathbb{N}$ (mathematisch geschrieben gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$).

Bemerkung (Anmerkung des Autors): Auch im Laufe des Mathematik-Studiums und gerne auch noch danach sollte man immer mal wieder über den Begriff der Unendlichkeit nachdenken. Dieser ist auch nach vielen Jahren Studium in meinen Augen noch immer faszinierend. Je öfter man darüber nachdenkt, auf umso mehr Kuriositäten stößt man rund um diesen Begriff ...

10.4 Die Umkehrabbildung

In der Mathematik sucht man oft inverse Objekte zu bekannten Objekten, weil man damit durchgeführte Rechenschritte oder Operationen einfach rückgängig machen kann. Zum Beispiel kann man einen Term A mit einem Term B multiplizieren, um einen neuen Term AB zu erhalten, der sich möglicherweise leicht vereinfachen lässt. Später möchte man vielleicht den Term A zurück haben (oder etwas gleichwertiges) und braucht dann nur durch B zu teilen (natürlich nur, wenn B nicht 0 ist...).
Im Gegensatz zum Teilen in den reellen Zahlen gibt es für Abbildungen das Konzept der „Umkehrabbildung“. Die Umkehrabbildung zu einer Abbildung macht gewissermaßen das rückgängig, was die Abbildung zuvor gemacht hat. Bildet eine Abbildung beispielsweise das Elemente a auf das Elemente b ab, so bildet die dazugehörige Umkehrabbildung b auf a ab (siehe auch Seite 5).

Definition 10.7 (Umkehrabbildung)
Gegeben sei eine *bijektive* Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N. Die **Umkehrabbildung zu f** ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} f^{-1} : N &\to M \\ y &\mapsto \text{„das } x \in M\text{, welches die Bedingung } f(x) = y \text{ erfüllt“} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Die Umkehrabbildung ist in der Definition wohldefiniert, da die Abbildung f *bijektiv* ist. Somit gibt es zu *jedem* $y \in N$ *genau ein* $x \in M$, welches $f(x) = y$ erfüllt – dieses x ist also gerade $f^{-1}(y)$.

- Beim Begriff „Urbild“ taucht ebenfalls das Symbol f^{-1} auf. Dort hat es aber eine andere Bedeutung: Sehen wir den Ausdruck $f^{-1}(B)$ und ist B eine *Teilmenge* des Wertevorrats N von f, so müssen wir $f^{-1}(B)$ als das Urbild der Menge B verstehen (also als Menge). Betrachten wir hingegen $f^{-1}(b)$, wobei $b \in N$ ein *Element* des Wertevorrats von f ist, so müssen wir f^{-1} als Umkehrabbildung und damit $f^{-1}(b)$ als Funktionswert einer Umkehrabbildung auffassen. Steht f^{-1} alleine, ist damit meistens die Umkehrabbildung gemeint – aber wir sollten in diesem Fall immer sehr vorsichtig sein.

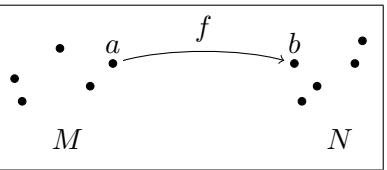
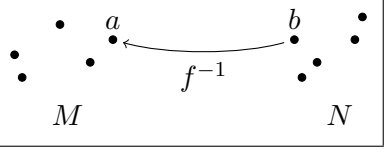
- Die Umkehrabbildung f^{-1} ist im Allgemeinen **nicht** $\frac{1}{f}$, sondern diejenige Abbildung, die die Wirkung von f wieder rückgängig macht.

- Genauso,wie f^{-1} die Wirkung von f rückgängig macht, macht f die Wirkung von f^{-1} wieder rückgängig. Es gilt also

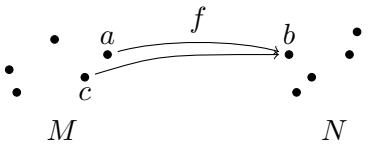
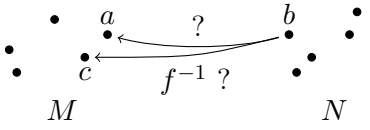
$$(f^{-1})^{-1} = f\,.$$

  Genau dieses „Rückgängigmachen“ aus diesem und dem vorigen Punkt ist die Aussage des gleich noch folgenden Satzes 10.8.

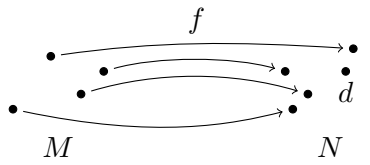
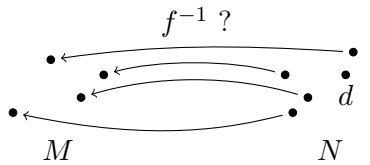
Wir wollen zuerst die Definition der Umkehrabbildung nachvollziehen:

Es sei eine bijektive Abbildung f gegeben, welche a auf b abbildet, d. h. es gilt $f(a) = b$.	
f^{-1} bildet b auf ein $x \in M$ ab, für das $f(x) = b$ gilt. Diese Bedingung wird (nur) von $x = a$ erfüllt.	

Dabei weisen wir darauf hin, dass es im Allgemeinen alles andere als einfach ist, dieses spezielle $x \in M$ zu einem $y \in N$ zu finden. Glücklicherweise wissen wir immerhin, *dass* es (genau) ein solches x geben muss, da in der Definition der Umkehrabbildung vorausgesetzt wird, dass f bijektiv ist. Die Surjektivität liefert uns gerade, dass es zu *jedem* $y \in N$ mindestens ein $x \in M$ gibt, sodass $f(x) = y$ gilt, also auch für unser $y = b$. Die Injektivität wiederum stellt sicher, dass es zu jedem $y \in N$ auch wirklich nur *genau ein* $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$.
Die Wichtigkeit der Injektivität von f schauen wir uns an folgendem Szenario noch einmal genauer an:

Angenommen, f wäre nicht injektiv und es gäbe neben $a \in M$ noch ein $c \in M$ mit $c \neq a$, welches auf b abgebildet werden würde.	
Dann wird die Bedingung $f(x) = b$ von $x = a$ erfüllt. Gleichzeitig würde diese Bedingung ebenfalls von $x = c$ erfüllt werden.	

Da eine Abbildung (also auch f^{-1}) jedem Element (hier y) nur maximal ein Element (hier x) zuordnen darf, kann f^{-1} keine Abbildung sein, da man sich „zwischen a und c entscheiden“ müsste.

Angenommen, f wäre nicht surjektiv. Dann gäbe es ein Element $d \in N$, auf das kein Element aus M abgebildet werden würde.	
Da es kein Element in N gibt, welches von f auf d abgebildet wird, ist für die vermeintliche Umkehrabbildung kein Funktionswert für d definiert.	

Da eine Abbildung (also auch f^{-1}) jedem Element im Definitionsbereich (hier N) ein Element aus dem Wertevorrat (hier M) zuordnen darf, kann f^{-1} keine Abbildung sein, da sie dem Element $d \in N$ keinen Wert aus M zuordnet.

Ein weiterer Nutzen aus der Forderung nach Bijektivität ist das Folgende:

Satz 10.8
Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt für alle $x \in M$ und $y \in N$:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Beweis:

- Sei $a \in M$. Dann haben wir $b := f(a) \in N$ und

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = \text{„das Element } x \in M, \text{ für welches gilt: } f(x) = b\text{“}.$$

  Da f *injektiv* ist, erfüllt $x = a$ als *einziges* Element aus M die Bedingung $f(x) = b$, womit $f^{-1}(f(a)) = a$ ist.

- Sei $b \in N$. Dann existiert dank der *Surjektivität* von f ein $a \in M$ mit $f(a) = b$ (dank der Injektivität von f gibt es nur eines) und gemäß Definition 10.7 gilt $f^{-1}(b) = a$. Schließlich ist

$$f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

□

Bemerkung:

- Auch wenn wir in dem Kapitel „Funktionen und Abbildungen I“ bereits verstanden haben, dass Funktionen nichts anderes als Abbildungen zwischen speziellen Mengen sind, stellen wir an dieser Stelle noch einmal heraus, dass sich Umkehrabbildungen für Funktionen komplett analog definieren lassen. In diesem Zusammenhang spricht man dann häufig auch von **Umkehrfunktionen**.

- Ist der Graph einer bijektiven Funktion $f : I \to J$ zwischen zwei Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, so erhalten wir den Graph ihrer Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

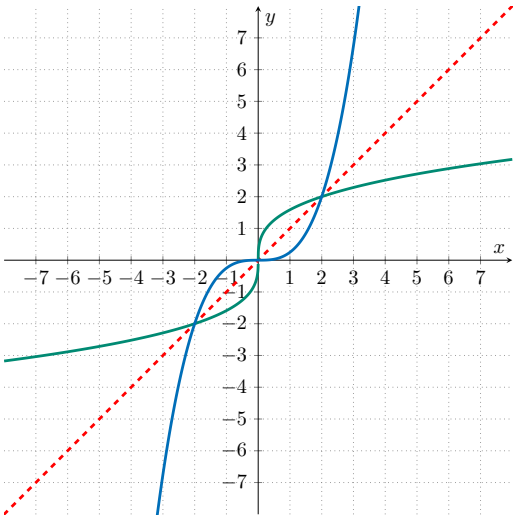


Abbildung 10.1: Graph einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (blau) samt Spiegelachse (rot) sowie Graph ihrer Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (grün).

Beispiel: Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 5$. Gesucht ist, falls existent, eine Umkehrabbildung von f. Dazu müssen wir zuerst überprüfen, ob eine Umkehrabbildung existiert, also ob f bijektiv ist:

Injektivität: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Falls f injektiv ist, müssen wir folgern können, dass in diesem Fall stets $x_1 = x_2$ gilt. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1^3 - 5 = x_2^3 - 5$ und daraus $x_1^3 = x_2^3$. Es ergibt sich hieraus durch Ziehen der dritten Wurzel, dass $x_1 = x_2$ gelten muss. Damit ist f injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus dem Wertevorrat. Dann ist nun ein x aus dem Definitionsbereich gesucht mit $f(x) = y$. Gehe dabei wie folgt vor:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 5 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = y + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+5} \tag{10.1}$$

Wir stellen insbesondere fest, dass das gefundene x eine reelle Zahl ist, also im Definitionsbereich von f liegt. Also ist f surjektiv.

Bijektivität: Da f injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

Nun wissen wir, dass f^{-1} existiert. Auch eine explizite Darstellung haben wir eben in (10.1) schon indirekt ausgerechnet. Dazu überlegen wir Folgendes: Die gesuchte Umkehrabbildung f^{-1} von f muss die Bedingung erfüllen, dass für alle y aus dem Wertebereich von f gilt: $f(f^{-1}(y)) = y$. Also muss f^{-1} so definiert sein, dass $f^{-1}(y)$ gerade der Wert x ist, der in f eingesetzt wieder y ergibt – wir suchen also für jedes y ein x mit $f(x) = y$. Die Berechnung dazu haben wir im obigen Beweis der Surjektivität von f in (10.1) bereits durchgeführt.
Diese hat ergeben, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(\sqrt[3]{y+5}) = y$. Daraus ergibt sich für alle $y \in \mathbb{R}$, dass $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+5}$ ist.

Bemerkung: Es kommt manchmal vor, dass wir für eine Abbildung gerne eine Umkehrfunktion hätten, die Abbildung aber nicht bijektiv ist.

- Falls die Abbildung nicht injektiv ist, so können wir den Definitionsbereich derart einschränken, dass die Abbildung auf dem kleineren Definitionsbereich injektiv ist.
- Ist die Abbildung (auch) nicht surjektiv, so können wir genauso den Wertevorrat derart einschränken, dass die Abbildung auf dem kleineren Wertevorrat surjektiv ist. Genauer müssen wir den Wertevorrat auf das Bild des eingeschränkten Definitionsbereichs beschränken.

Durch diese Einschränkungen des Definitions- und Wertebereichs erhalten wir also auf diesen kleineren Mengen eine bijektive Abbildung, zu der wir dann auf ebendiesen Mengen eine Umkehrabbildung definieren können.

Beispiel: Als Beispiel können wir uns die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

ansehen, welche, wie man am Graphen anschaulich sehen kann, weder injektiv noch surjektiv ist. Schränken wir allerdings den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ein ($\mathbb{R}_{\leq 0}$ würde zum Beispiel genauso gehen), so erhalten wir eine Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2,$$

welche schon einmal *injektiv* ist. Beschränken wir anschließend auch noch den Wertevorrat auf das Bild $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die *bijektive* Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_2(x) = x^2 \,.$$

Die Umkehrfunktion dieser (nun bijektiven) Funktion ist

$$f_2^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \,.$$

Kapitel verfasst von:

2023: Sven Logemann
2022: Anton Getz, Niklas Müller
2019: Nils Näthke
2016: Julia Redant, Nick Würdemann
2014-2015: Tabea Henning, Hannes de Witt, Malte Behr
2012-2013: Hannes de Witt