Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Funktionen und Abbildungen II

× Aufgabe 1: Abbildungseigenschaften

Wir betrachten diejenigen Vorschriften, welche wir auf dem Übungszettel zu Funktionen und Abbildungen I als Abbildungen identifiziert haben und anschließend deren Bilder bestimmt haben. Bestimme nun, ob die Abbildungen injektiv und/oder surjektiv sind. Welche Abbildungen sind demnach bijektiv?

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\},\ f_1(x) = 2^x$. *Lösung: Das Bild von* f_1 *ist* $\{2, 16, 64\}$ *und somit ist* f_1 *surjektiv. Ferner ist* f_1 *injektiv und damit bijektiv.*

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 7x^2 + 3$. *Lösung:* f_2 *ist weder injektiv noch surjektiv.*

(c) $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$. *Lösung:* f_4 *ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, da die* 1 *zum Beispiel nicht getroffen wird.* f_4 *ist aber injektiv, da für* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\frac{z_1}{z_1+\frac{1}{2}} = \frac{z_2}{z_2+\frac{1}{2}} \Rightarrow z_1(z_2+\frac{1}{2}) = z_2(z_1+\frac{1}{2}) \Rightarrow z_1z_2+\frac{1}{2}z_1 = z_2z_1+\frac{1}{2}z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

(d) $f_6 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q},\ f_6(\frac{a}{b}) = \frac{4b}{3a}$. *Lösung: Das Bild von* f_6 *ist* $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$*, sodass* f_6 *nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv ist. Ferner ist* f *injektiv, da für alle* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = f\left(\frac{a_2}{b_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4b_1}{3a_1} = \frac{4b_2}{3a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

(!e) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet. *Lösung: Die Abbildung ist surjektiv, da für alle* $x \in \mathbb{N}$ *gilt, dass* $\{x\}$ *im Definitionsbereich von* f_7 *liegt und* $f_7(x) = x$ *für* $x \in \mathbb{N}$ *gilt. Die Abbildung ist aber nicht injektiv, da bspw.* $\{1, 2, 3\}$ *und* $\{2, 3\}$ *Elemente des Definitionsbereichs sind, diese aber auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden:* $f_7(\{1, 2, 3\}) = 3 = f_7(\{2, 3\})$.

Aufgabe 2: Komposition, Injektivität und Surjektivität

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei Abbildungen zwischen zwei Mengen M und N. Zeige: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist g injektiv. Gilt auch die Umkehrung? Liefere hierzu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(!) Zeige weiter: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist f auch surjektiv.

Lösung: Zeige zuerst: g *injektiv. Seien dazu* $y_1, y_2 \in N$ *mit* $g(y_1) = g(y_2)$*. Es gilt aufgrund der Definition von* $f \circ g$

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$$

und damit $y_1 = y_2$. Damit ist Injektivität von g bereits nach Definition nachgewiesen. Die Umkehrung gilt nicht, da wir z.B. $N = M = \mathbb{N}_0$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ g(x) = x$ sowie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ f(x) = 0$ wählen können. Dann ist g offensichtlich injektiv (sogar bijektiv), aber es gilt $(f \circ g)(x) = 0 \neq x$ für alle $x \neq 0$.

Zeige nun weiter, dass f surjektiv ist. Sei dazu $y \in N$ beliebig und setze $x := g(y) \in M$. Dann gilt, dass $f(x) = f(g(y)) = y$ ist. Demnach finden wir für jedes $y \in N$ ein $x \in M$, sodass $f(x)=y$ ist.

Beide Teile zusammen zeigen die Aussage der Aufgabe.

! Aufgabe 3: Mächtigkeit

Beweise das folgende Lemma aus dem Vortrag. Sollte das Kapitel „Vergleich der Mächtigkeiten von Bild- und Urbildmengen“ im Vortrag nicht behandelt worden sein, lese dir zuvor das entsprechende Kapitel (11.2) im Skript durch.

Lemma I (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

Lösung: Für $\#M = \infty$ ist das Lemma analog zum Beweis des bewiesenen Lemmas aus der Vorlesung – ist $\#M = \infty$, so ist es egal, welche Mächtigkeit N hat, da das die Aussage des Lemma in jedem Fall erfüllt ist. Falls $\#M < \infty$ ist, existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Elemente $a_1, ..., a_n \in M$, sodass $M = \{a_1, ..., a_n\}$ ist. Weiter gilt:

$$N \overset{f \text{ surjektiv}}{=} f(M) = f(\{a_1, ..., a_n\}) \overset{\text{Übung}}{=} f(\{a_1\}) \cup ... \cup f(\{a_n\})$$

$$\Rightarrow \#N = \#(f(\{a_1\}) \cup ... \cup f(\{a_n\})) \overset{(*)}{\leq} \#f(\{a_1\}) + ... + \#f(\{a_n\})$$

$$= \underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} = n = \#M$$

Somit ist das Lemma vollständig bewiesen. Die Ungleichung $(*)$ haben wir bereits auf dem Übungszettel zur Mengenlehre bewiesen.

× Aufgabe 4: Umkehrabbildungen

Bearbeite für die folgenden Abbildungen (1) und (2) jeweils die folgenden Aufgaben:

(a) Prüfe, ob die Umkehrabbildung definiert ist.

(b) Wenn möglich, gib eine explizite Formel für die Umkehrabbildung an.

(c) Wenn die Umkehrabbildung existiert, bestimme ihre Funktionswerte an den angegebenen Stellen.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5x + 3$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(8)$ und $f^{-1}(-3)$.

Lösung:

(a) *Laut Definition der Umkehrabbildung ist die einzige Voraussetzung für die Existenz der Umkehrabbildung, dass f bijektiv ist. Genau das prüfen wir also:*

injektiv: *Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Elemente aus dem Definitionsbereich von f mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist*

$$5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \ \Rightarrow\ 5x_1 = 5x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

Also ist f injektiv.

surjektiv: *Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element aus dem Wertevorrat von f. Gesucht ist ein $x \in \mathbb{R}$ (Element aus dem Definitionsbereich) mit $f(x) = 5x+3 = y$. Diese Gleichung können wir nach x auflösen und erhalten $x = \frac{y-3}{5}$. Tatsächlich ist damit $f(x) = f\left(\frac{y-3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{y-3}{5} + 3 = (y-3) + 3 = y$. Also ist f surjektiv.*

Also ist f bijektiv und besitzt damit eine Umkehrabbildung.

(b) *Laut Definition gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:*

$$f^{-1}(y) = \text{„das } x \in \mathbb{R}\text{, welches die Bedingung } f(x) = y \text{ erfüllt“}$$

Wie wir zu gegebenem y ein solches x bestimmen, haben wir glücklicherweise schon bei der Überprüfung auf Surjektivität „nebenbei“ herausgefunden:
$x = \underbrace{\frac{y-3}{5} = f^{-1}(y)}_{\text{Formel für die Umkehrabbildung}}$. *Es gilt also:* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

(c) *Zuletzt dürfen wir noch zwei Funktionswerte der Umkehrabbildung bestimmen, was dank der Formel nicht besonders schwierig ist:*

- $f^{-1}(8) = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$
- $f^{-1}(-3) = \frac{-3-3}{5} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 4x^2 - x$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(15)$.

Lösung:

(a) *Die erste Frage ist wieder, ob die Umkehrabbildung überhaupt definiert ist. Dazu wird f auf Bijektivität überprüft:*

surjektiv: *Um f auf Surjektivität zu prüfen, stellen wir für ein festes $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$f(x) = y \ \Leftrightarrow\ 4x^2 - x = y \ \Leftrightarrow\ x^2 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 0$$

auf und untersuchen, ob für jedes (beliebige aber feste) $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ gefunden werden kann, welches die Gleichung erfüllt (z.B. mit p-q-Formel

bzgl. x).
Wenn man nun bereits die Vermutung hat, dass f nicht surjektiv ist, kann man direkt versuchen, ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von f zu finden. Alternativ könnte man die p-q-Formel auch zunächst mit allgemeinem y lösen und dann schauen, ob die gefundene Lösung für x, in der ja y auftaucht, für jedes y aus dem Wertevorrat von f definiert ist. Ein Gegenbeispiel zur Surjektivität ist das folgende:
Sei $y = -1$ ein Element aus dem Wertevorrat. Angenommen, f wäre surjektiv, dann gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 - x = -1$, also $x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 0$. Mit Hilfe der p-q-Formel ergäbe sich als Lösung hierfür

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{64} - \frac{1}{4}}_{<0}},$$

was jedoch in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist, da die Wurzel in $\mathbb{R}$ nur aus nicht-negativen reellen Zahlen gezogen werden kann. Es gibt also für $y = -1$ kein Urbild unter f. Das betrachtete Beispiel ist also ein Gegenbeispiel zur Surjektivität von f.
(Hätte man diese Rechnung mit allgemeinem y gemacht, so hätten wir

$$x = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{y}{4}}$$

erhalten und hätten an dieser Stelle die Einschränkung $y \geq -\frac{1}{16}$ treffen müssen, damit der Ausdruck unter der Wurzel nicht-negativ und die rechte Seite der Gleichung definiert ist. Also wäre es uns nicht möglich, für alle y aus dem Wertevorrat $\mathbb{R}$ von f ein Urbild zu finden – genauer werden alle $y < -\frac{1}{16}$ von f nicht getroffen.)

(alternativ) injektiv: *Wir vermuten, dass f nicht injektiv ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, f sei injektiv, d.h. für alle y aus dem Wertevorrat gibt es höchstens ein x mit $f(x) = y$. Insbesondere gilt dies für $y = 0$.*
Sei also $f(x) = 0$, d.h. $4x^2 - x = 0$. Dies ist äquivalent zu $x(4x - 1) = 0$, was jedoch sowohl für $x = 0$ als auch für $4x - 1 = 0$, also $x = \frac{1}{4}$ erfüllt ist. Daher ist f nicht injektiv.

Damit sind wir fertig, denn ohne Surjektivität bzw. Injektivität keine Bijektivität und ohne Bijektivität keine Umkehrabbildung.

(b) –

(c) –