Vorkurs Mathematik 2026 | Aufgaben zum Thema

Funktionen und Abbildungen II

× Aufgabe 1: Abbildungseigenschaften

Wir betrachten diejenigen Vorschriften, welche wir auf dem Übungszettel zu Funktionen und Abbildungen I als Abbildungen identifiziert haben und anschließend deren Bilder bestimmt haben. Bestimme nun, ob die Abbildungen injektiv und/oder surjektiv sind. Welche Abbildungen sind demnach bijektiv?

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\},\ f_1(x) = 2^x$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 7x^2 + 3$.

(c) $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$.

(d) $f_6 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q},\ f_6(\frac{a}{b}) = \frac{4b}{3a}$.

(!e) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \to \mathbb{N},\ f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet.

Aufgabe 2: Komposition, Injektivität und Surjektivität

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei Abbildungen zwischen zwei Mengen M und N. Zeige: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist g injektiv. Gilt auch die Umkehrung? Liefere hierzu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(!) Zeige weiter: Gilt $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in N$, so ist f auch surjektiv.

! Aufgabe 3: Mächtigkeit

Beweise das folgende Lemma aus dem Vortrag. Sollte das Kapitel „Vergleich der Mächtigkeiten von Bild- und Urbildmengen“ im Vortrag nicht behandelt worden sein, lese dir zuvor das entsprechende Kapitel (11.2) im Skript durch.

Lemma I (Mächtigkeitenvererbung bei surjektiven Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.
Dann gilt: $\#M \geq \#N$

×= Wichtige Aufgabe

!= Schwierige Aufgabe

× Aufgabe 4: Umkehrabbildungen

Bearbeite für die folgenden Abbildungen (1) und (2) jeweils die folgenden Aufgaben:

(a) Prüfe, ob die Umkehrabbildung definiert ist.

(b) Wenn möglich, gib eine explizite Formel für die Umkehrabbildung an.

(c) Wenn die Umkehrabbildung existiert, bestimme ihre Funktionswerte an den angegebenen Stellen.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5x + 3$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(8)$ und $f^{-1}(-3)$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 4x^2 - x$ – Falls f^{-1} existiert, bestimme $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(15)$.