9 Funktionen und Abbildungen I

Funktionen tauchten bereits in der Schule an allen möglichen Stellen auf. Egal, ob es darum ging, bestimmte Zusammenhänge durch eine Funktion zu beschreiben, oder gegebene Funktionen abzuleiten oder zu integrieren. Man könnte daher fast meinen, dass Funktionen eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik spielen – und genauso ist es auch!

Funktionen und *Abbildungen* sind zwei der fundamentalen Objekte in der Mathematik und daher auch in den meisten ihrer Teilgebiete anzutreffen. Wir haben bereits in der Schule Funktionen kennengelernt. Den Begriff einer Funktion wollen wir in diesem Kapitel noch etwas formalisieren und daraus einen allgemeineren Begriff, nämlich den der Abbildung, entwickeln. Letzterer ist noch einmal sehr viel weitreichender und im Laufe dieses Kapitels werden wir erkennen, dass die bereits aus der Schule bekannten Funktionen tatsächlich Spezialfälle von allgemeinen Abbildungen darstellen. Wie wichtig Funktionen und Abbildungen sind, sieht man ebenfalls daran, dass sie an gewissen Stellen innerhalb der Mathematik als das zentrale zu untersuchende Objekt selbst vorkommen und in anderen Kontexten darüber hinaus als Hilfsmittel auftauchen, um das eigentlich interessierende Objekt zu studieren. Insbesondere in der Analysis stehen zunächst die Funktionen und Abbildungen als solche im Mittelpunkt und wir versuchen, möglichst viele Informationen über diese zu erlangen, wohingegen sie in der Algebra erstmals als Hilfsobjekte auftauchen.

9.1 Was sind Funktionen?

Auch wenn Funktionen bereits irgendwie bekannt sein dürften, wollen wir hier zunächst eine exakte Definition dafür angeben, was wir unter Funktionen verstehen wollen.

Definition 9.1 (Funktion)
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle oder zwei Vereinigungen von endlich vielen Intervallen.
Wir bezeichnen eine Vorschrift f, die *jedem* $x \in I$ *genau ein* $y \in J$ zuordnet, als **Funktion von I nach J**.

Wir schreiben: $f : I \to J$.

Insbesondere können I und/oder J natürlich auch ganz $\mathbb{R}$ sein.
Um missverständnisfrei über diese Mengen I und J reden zu können, geben wir ihnen die folgenden Namen.

Definition 9.2 (Definitionsbereich und Wertevorrat)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 9.1 und $f : I \to J$ eine Funktion. Dann nennen wir

- I den **Definitionsbereich** (auch **Definitionsmenge**) und
- J den **Wertevorrat** (auch **Wertebereich** oder **Wertemenge**)

von f.

Die Funktionen, die wir aus der Schule bereits kennen, fallen allesamt unter die eben genannte formale Definition einer Funktion. Denn dort wird jedem „x-Wert“ aus dem Definitionsbereich genau ein „y-Wert“ aus dem Wertevorrat zugeordnet (zum Beispiel durch die Vorschrift $f(x) = x^2$). Gleichzeitig stellt die Definition aber genaue Ansprüche daran, was Vorschriften erfüllen müssen, um eine Funktion zu sein, weshalb nicht jede willkürlich aufgestellte Vorschrift automatisch eine Funktion ist (ein Beispiel folgt auf Seite 3).
Wir werden die in der Definition aufgestellte Bedingung an eine Funktion gleich in Abschnitt 9.2 noch etwas genauer betrachten.

Bemerkung: Diese Definition einer Funktion lässt sich noch weiter verallgemeinern. Wenn wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in der obigen Definition 9.1 durch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ersetzen wollen, spricht man noch immer von Funktionen (manchmal auch von „komplexwertigen Funktionen“). An dieser Stelle wollen wir dies aber nicht weiter vertiefen und verbleiben bei der hier gegebenen Definition.

Bemerkung: Es gibt zwei geläufige Schreibweisen für die Funktionsvorschrift von Funktionen:

1. $f : I \to J,\ f(x) =$ „*Ausdruck in* x“, wie es in der Schule oft üblich ist.
   Beispiel:
   $$f : (-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$
2. $f : I \to J,\ x \mapsto$ „*Ausdruck in* x“ ist eine weitere verbreitete Schreibweise.
   Beispiel:
   $$f : (-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$
   Häufig schreibt man diese auch untereinander:
   $$\begin{aligned} f : (-1, 3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Studium werden wir auch Funktionen begegnen, von denen wir zwar zeigen können, *dass* sie tatsächlich Funktionen sind (vgl. dazu auch den Abschnitt 9.2), wir aber keine konkrete Funktionsvorschrift hinschreiben können, wie z.B. $f(x) = x^2$.

Bemerkung (Unterschied von f und $f(x)$): An dieser Stelle weisen wir nachdrücklich darauf hin, dass $f(x)$ immer nur einen **Funktionswert**, also eine einzelne reelle Zahl, beschreibt, während f die **Funktion** selbst (als ganzes) bezeichnet.
Man sagt also: „Die Funktion f nimmt in x den Funktionswert $f(x)$ an.“

9.2 Wohldefiniertheit und Graph einer Funktion

Wie bereits erwähnt stellt schon die Definition einer „Funktion“ gewisse Anforderungen an mögliche Vorschriften für Funktionen. Diese Anforderungen werden jedoch schnell vergessen, was insofern fatal ist, als dass nicht jede Vorschrift zwischen zwei Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ automatisch eine Funktion ist, sondern nur dann, wenn gilt:

***Jedem* Element aus der Definitionsmenge wird *genau ein* Element aus dem Wertevorrat zugewiesen.**

Um zu vermeiden, dass man diese versteckte, aber zentrale Eigenschaft von Funktionen übersieht, betonen wir diese Forderung aus der Definition, indem wir zwischen Vorschriften und Funktionen unterscheiden (zur Verdeutlichung sagen wir auch manchmal „wohldefinierte Funktion“ statt nur „Funktion“ – auch wenn eine der Begriff „Funktion“ per Definition die Wohldefiniertheit bereits voraussetzt).

Definition 9.3

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 9.1. Eine Vorschrift $f : I \to J$ heißt **wohldefiniert**, falls *jedem* Element aus der Definitionsmenge *genau ein* Element aus dem Wertevorrat zugewiesen wird.

In diesem Fall nennen wir die durch die Vorschrift definierte Funktion zur Verdeutlichung auch **wohldefinierte Funktion**.

Wenn man also eine Vorschrift aufgestellt und somit eine vermeintliche Funktion gefunden hat (oder eine vermeintliche Funktion gegeben bekommt), wäre genau genommen der erste Schritt, diese auf Wohldefiniertheit zu prüfen, um festzustellen, ob es ich bei der Vorschrift um eine Funktion handelt oder nicht.

Beispiel:

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ aus Kapitel 9.1 ist wohldefiniert, denn
   - wir können jedes $x \in \mathbb{R}$ mit sich selbst multiplizieren und erhalten wieder eine reelle Zahl, d. h. *jedem* x aus dem Definitionsbereich wird durch die Vorschrift $f(x) = x^2$ ein Element *aus dem Wertevorrat* zugeordnet.
   - es kann nicht passieren, dass einem x aus dem Definitionsbereich durch die Vorschrift verschiedene Funktionswerte $f(x)$ zugeordnet werden, da die Multiplikation in $\mathbb{R}$ eindeutig ist – es wird also jedem x *genau ein* Funktionswert zugeordnet.
2. Die Vorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2$ falls $x \leq 1$ und $f(x) = 1$ falls $x \geq -1$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Funktion, da für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

   $$f(x) = 2 \neq 1 = f(x)$$

   gilt. Es sind also bestimmten Wert aus der Definitionsmenge mehrere Werte aus dem Wertevorrat zugeordnet.

3. Die Vorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ f(x) = 5x$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Funktion, da für $x \leq 0$ gilt, dass $f(x) \leq 0$ ist und damit nicht mehr in dem Wertevorrat liegen würde.

An dem letzten Beispiel erkennen wir aber bereits, dass man sich hier schon ein bisschen anstrengen muss, um eine nicht wohldefinierte Funktion zu finden.
Als „anschauliche Regel gilt bei Vorschriften $f : I \to J$ mit zwei Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$, dass f wohldefiniert (also eine Funktion) ist, wenn der Graph von f (siehe Definition 9.4) nirgends „übereinander liegt“ (für ein Beispiel siehe Abbildung 9.1).

Definition 9.4 (Graph)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 9.1 und $f : I \to J$ eine Funktion (oder eine Vorschrift). Der **Graph** von f ist die Menge

$$\{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subseteq I \times J\ .$$

Bemerkung: Der Graph einer Funktion ist umgangssprachlich also genau das, was wir sehen, wenn wir die Funktion zeichnen.

Wenn wir den Graph der Vorschrift aus Beispiel 2 von oben zeichnen, so sehen wir, dass dieser auf $[-1, 1]$ „übereinander“ liegt und die Vorschrift daher keine Funktion ist:

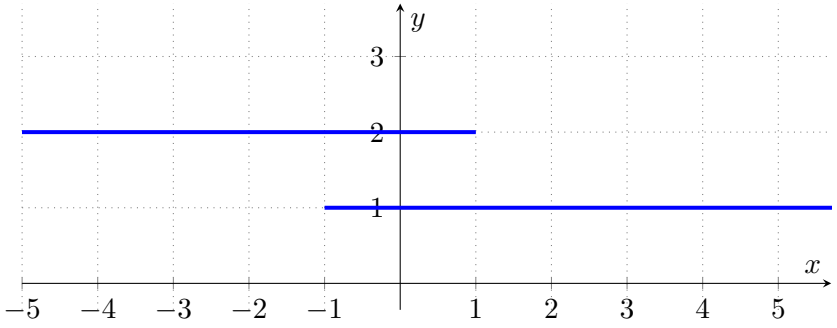


Abbildung 9.1: Graph der Vorschrift aus Beispiel 2 – Keine Funktion!

Die Funktionen, die wir aus der Schule bereits kennen, sind alle wohldefiniert – trotzdem sollte man hier immer vorsichtig sein und zumindest kurz über die Wohldefiniertheit nachdenken. Im Folgenden werden wir uns nämlich allgemeineren Abbildungen zuwenden, bei denen es deutlich schneller passieren kann, dass vermeintliche Abbildungen nicht mehr wohldefiniert sind!

9.3 Von Funktionen zu Abbildungen

Wir haben nun bereits eine ziemlich gute Vorstellung und vor allem exakte Definition, was Funktionen sind. In einem nächsten Schritt wollen wir den Begriff einer Funktion jetzt verallgemeinern auf den Begriff der Abbildung.

Definition 9.5 (Abbildung)
Seien M und N zwei nicht-leere Mengen.
Wir bezeichnen eine Vorschrift f, die *jedem* $x \in M$ *genau ein* $y \in N$ zuordnet als **Abbildung von M nach N**.
Schreibe: $f : M \to N$.

Insbesondere sind die bereits diskutierten Funktionen wie $f : (-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ganz spezielle Abbildungen, bei denen die Mengen M und N zwei Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Eine Funktion ist also ein *Spezialfall* einer Abbildung – der Unterschied zwischen diesen Objekten besteht lediglich darin, dass Abbildungen nicht nur zwischen Intervallen in $\mathbb{R}$, sondern zwischen *beliebigen* Mengen definiert und daher allgemeiner sind.

Für Abbildungen verwenden wir die gleichen Schreibweisen, wie auch schon für Funktionen, also

$$f : M \to N, \quad f(x) = \text{„}\textit{Ausdruck in } x\text{“}$$

oder

$$f : M \to N, \quad x \mapsto \text{„}\textit{Ausdruck in } x\text{“}\,.$$

Der Unterschied zwischen f und $f(x)$ gilt bei allgemeinen Abbildungen genau so wie schon bei Funktionen. Während $f(x)$ einen konkreten Wert (den Funktionswert der Abbildung f in x) bezeichnet, beschreibt f die Abbildung als Ganzes! Man nennt $f(x)$ übrigens auch bei allgemeinen Abbildungen häufig „Funktionswert“ oder auch „Bild“ von x unter f.

Abschließend erwähnen wir noch einmal, dass auch für allgemeine Vorschriften, das heißt vermeintliche Abbildungen, die Forderung der Wohldefiniertheit gilt, da Abbildungen analog zu Funktionen definiert sind und an sie daher die gleichen Forderungen wie an Funktionen gestellt werden. In diesem Zusammenhang schauen wir uns kurz einige Beispiele zu Abbildungen und nicht wohldefinierten Vorschriften an.

Beispiele:

1. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{x}{x+1}$ ist wohldefiniert, denn
   - wir können zu jedem $x \in \mathbb{N}$ eine 1 addieren und erhalten eine natürliche Zahl (insbesondere also nicht Null), weshalb wir durch diese Zahl teilen dürfen. Dividieren wir x durch $x+1$, erhalten wir eine rationale Zahl, d. h. *jedem* x aus dem Definitionsbereich wird durch die Vorschrift $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (mindestens) ein Element *aus dem Wertevorrat* zugeordnet.

- es kann nicht passieren, dass einem x aus dem Definitionsbereich durch die Vorschrift mehrere Funktionswerte $f(x)$ zugeordnet werden, da die Addition und Division in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}$ eindeutig ist – es wird also jedem x *genau* ein Funktionswert zugeordnet.

2. Die Vorschrift $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(\frac{a}{b}) = a$ ist nicht wohldefiniert und damit keine Abbildung, da
$$f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = 1 \neq 2 = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(1)$$
gilt. Es sind also einem Wert aus der Definitionsmenge (der Zahl $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$) mehrere Werte aus dem Wertevorrat zugeordnet. An solchen Stellen, an denen eine Abbildung sich auf eine konkrete Darstellung der Elemente bezieht, ist stets besondere Vorsicht bei der Wohldefiniertheit geboten! Denn wie wir gesehen haben, können Elemente oft auf verschiedene Weisen dargestellt werden, was jedoch keinen Unterschied für den jeweiligen Funktionswert machen darf.

3. Die Vorschrift
$$f : \{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\} \to \{\text{Auto}, \text{Motorrad}\}$$
definiert durch
$$\begin{aligned} f(\text{rot}) &= \text{Auto}, \\ f(\text{grün}) &= \text{Auto}, \\ f(\text{blau}) &= \text{Motorrad} \end{aligned}$$
ist wohldefiniert, also eine Abbildung, da jedem Element aus der Definitionsmenge $\{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\}$ genau ein Wert aus dem Wertevorrat $\{\text{Auto}, \text{Motorrad}\}$ zugeordnet wird.

4. Die Vorschrift $f : \{1, 2, 3\} \to \{7, 8\},\ f(1) = 8,\ f(2) = 7$ ist nicht wohldefiniert, also keine Abbildung, da für das Element 3 der Definitionsmenge $\{1, 2, 3\}$ kein Wert im Wertevorrat definiert ist.

Nachdem wir eine Vorschrift auf Wohldefiniertheit geprüft und damit sichergestellt haben, dass es sich bei dieser tatsächlich um eine Abbildung (bzw. Funktion) handelt, charakterisieren wir im Folgenden einige grundlegende Eigenschaften von Abbildungen.

Wie bereits bei Funktionen nennen wir für eine Abbildung $f : M \to N$ in analoger Weise M den Definitionsbereich und N den Wertevorrat von f.

- Der Definitionsbereich einer Abbildung f ist also die Menge der Elemente x, für die ein Funktionswert $f(x)$ definiert ist.

- Der Wertevorrat ist eine Menge, die *mindestens* alle Funktionswerte $f(x)$ enthält – sie kann aber auch größer sein. Insbesondere heißt dies, dass der Wertevorrat von f noch keine genauen Informationen liefert, welche Werte die Funktion f tatsächlich annimmt.

Daher wird in diesem Zusammenhang von zwei weiteren Begriffen Gebrauch gemacht: dem *Bild* einer Abbildung und dem *Urbild* von Teilmengen ihres Wertevorrats.

Bemerkung: Da Funktionen nichts anderes als spezielle Abbildungen sind, gelten die folgenden Definitionen natürlich genau so für Funktionen. Gleiches gilt für alle weiteren Eigenschaften, die wir in den folgenden Unterkapiteln behandeln werden. In den Beispielen (im Skript und in den Übungsaufgaben) werden daher auch sowohl allgemeine Abbildungen als auch Funktionen im Speziellen vorkommen. Wir werden aber im weiteren Verlauf nur noch von Abbildung reden, was so zu verstehen ist, dass Funktionen darin mit eingeschlossen sind.

Definition 9.6 (Bild und Urbild)
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.

(1) Für $S \subseteq M$ nennen wir die Menge

$$f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$$

das **Bild** von S unter f.
Für das Bild von M unter f spricht man auch kurz nur vom „Bild von f“.

(2) Für $L \subseteq N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(L) := \{x \mid f(x) \in L\}$$

das **Urbild** von L unter f.

Bemerkung:

- Stellenweise werden noch andere Begriffe als die hier Eingeführten auf unterschiedliche Weisen genutzt, sodass man sich beim Lesen von Texten immer genau verdeutlichen sollte, was mit gewissen Begriffen gemeint ist.
- Insbesondere ist beim Urbild zu beachten, dass f^{-1} im Allgemeinen nicht etwa $\frac{1}{f}$ bedeutet, sondern als eigenständiges Symbol für ein eigenständiges Objekt zu verstehen ist!

Beispiele:

1. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
   - Der Definitionsbereich von f sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, genau wie der Wertevorrat. Das Bild $f(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ unter f sind aber nur alle nicht-negativen reellen Zahlen, da x^2 für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht-negativ ist, wie aus der Schule bekannt ist.

- Das Bild des Intervalls $[-2,3)$ ist $f([-2,3)) = [0,9)$, wie man sich (zur Zeit noch) mit etwas Anschauung und Schulwissen überlegen kann.
- Das Bild der einelementigen Menge $\{2\}$ ist $f(\{2\}) = \{4\}$ – nicht zu verwechseln mit dem Funktionswert $f(2) = 4$ des *Elements* 2.
- Das Urbild von $\{1\}$ ist $f^{-1}(\{1\}) = \{1,-1\}$, da *nur* für $x = 1$ oder $x = -1$ gilt, dass $f(x) = 1$ ist.
- Das Urbild von $\{0\}$ ist $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, da $f(x) = 0$ *nur* für $x = 0$ gilt.
- Das Urbild von $\{-1\}$ ist $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

2. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}^{(*)}$.
   - Das Bild von dem Intervall $[0,\ 4)$ unter f ist $f([0,\ 4)) = \{0,1,2,3\}$.
   - Das Bild von $\mathbb{R}$ unter f ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$.
   - Das Urbild der Menge $\mathbb{N}$ unter f ist $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{R}_{\geq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.
   - Das Urbild der Menge $\{0\}$ unter f ist $f^{-1}(\{0\}) = [0,\ 1)$.

   $(*)$ „max“ bezeichnet das Maximum der Menge, vor der es steht. Diese Abbildungsvorschrift rundet demnach die Zahl $x \in \mathbb{R}$ auf die nächst kleinere ganze Zahl ab. Wir überlassen es den Lesenden als Übung, sich zu überlegen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.

9.4 Komposition von Abbildungen

Eine wichtige Operation im Zusammenhang mit Abbildungen ist die **Komposition** von Abbildungen, welche manchmal auch Verkettung genannt wird. Diese kann man nutzen, um neue Abbildungen zu konstruieren und die Konstruktion in Teilschritte zu unterteilen.

Definition 9.7 (Komposition)
Seien S, R, M und N vier Mengen. Es seien $g : S \to R$ und $f : M \to N$ zwei Abbildungen, wobei $g(S) \subseteq M$ gelte.
Die **Komposition** $f \circ g$ von f und g ist wieder eine Abbildung, die definiert ist durch

$$f \circ g : S \to N, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)), \text{ für alle } x \in S.$$

Achtung! Es können nicht *beliebige* Abbildungen miteinander kombiniert werden. Die Definition erfordert, dass das Bild der Abbildung g im Definitionsbereich der Abbildung f liegt.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 3$ gilt:

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Eine Beschreibung zur Erstellung dieser Abbildung $f \circ g$ könnte lauten: „Addiere zu jeder Zahl 3 und quadriere anschließend das Ergebnis“. Diese Erklärung ist offenbar viel einfacher als „Quadriere jede Zahl, addiere dann ihr Sechsfaches dazu und addiere zu diesem Ergebnis noch einmal 9.“ Ein vermeintlicher Umweg ist hier also praktikabler.

Besonders ist darauf zu achten, dass anders als bei üblichen Verknüpfungen die Komposition **von rechts nach links** angewendet wird. Möchte man $(f \circ g)(x)$ berechnen, wendet man auf x zuerst die Definition von g und danach auf $g(x)$ die Definition von f an. Man kann sich das so vorstellen, dass das Objekt „$(f \circ g)$“ von links auf x „zufährt“ und x dabei natürlich zuerst von g „eingesammelt“ wird, da g ja zuerst bei x ist. Wenn f dann x erreicht, so sitzt x bereits in g, weshalb f also $g(x)$ einsammeln muss.

Kapitel verfasst von:

2024: Malte Cramer
2023: Sven Logemann
2022: Anton Getz, Niklas Müller
2019: Nils Näthke