Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Funktionen und Abbildungen I

× Aufgabe 1: Wohldefiniertheit und Abbildungseigenschaften

Untersuche, ob es sich bei den folgenden Vorschriften um Abbildungen handelt.
Falls ja, bestimme das Bild dieser.

(a) $f_1 : \{1, 4, 6\} \to \{2, 16, 64\}$, $f_1(x) = 2^x$. *Lösung: f_1 ist eine Abbildung, da $2^1 = 2$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$ gilt. Das Bild von f_1 ist $\{2, 16, 64\}$.*

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 7x^2 + 3$. *Lösung: f_2 ist eine Abbildung, Bild von f_2 sind alle reellen Zahlen größer oder gleich 3.*

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$. *Lösung: f_3 ist keine Abbildung, da $f_3(0)$ nicht definiert ist.*

(d) $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f_4(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$. *Lösung: f_4 ist eine Abbildung, das Bild von f_4 ist $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}, n \text{ gerade}\right\}$, denn:*

$$\frac{z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{2z+1}{2}} = \frac{2z}{2z+1}$$

.

(e) $f_5 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f_5(\frac{a}{b}) = 2b - a$. *Lösung: f_5 ist keine Abbildung, da $f_5(1) \neq f_5(\frac{3}{3})$ gilt.*

(f) $f_6 : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}$, $f_6(\frac{a}{b}) = \frac{4b}{3a}$. *Lösung: f_6 ist eine Abbildung, da zum einen $f(x)$ für alle $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definiert und aus $\mathbb{Q}$ stammt und zum anderen f wohldefiniert ist, da $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau dann gleich sind, wenn es $a, b, n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x_1 = \frac{a}{b}$ und $x_2 = \frac{na}{nb}$ gilt (oder andersherum) – die Bildwerte dieser Elemente x_1 und x_2 sind dabei gleich. Eine andere mögliche Erklärung ist, dass gerade $f_6(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x}$ gilt und sowohl $\frac{1}{x}$ als auch $\frac{4}{3}$ (aufgefasst als konstante Abbildung) Abbildungen auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sind. Das Bild von f_6 ist $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.*

(!g) $f_7 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \subset \mathbb{N} \mid \#A \in \{0, \infty\}\} \to \mathbb{N}$, $f_7(A) = \max\{n \mid n \in A\}$, wobei $\max\{n \mid n \in A\}$ den Wert des größten Elementes aus A bezeichnet. *Lösung: f_7 ist eine Abbildung, denn da alle Elemente des Definitionsbereichs (Mengen!) endlich viele aber wenigstens eine natürliche Zahl als Element beinhalten, ist das Maximum dieser Mengen wohldefiniert. Das Bild von f_7 ist $\mathbb{N}$, da für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\{x\}$ im Definitionsbereich von f_7 liegt und $f_7(x) = x$ für $x \in \mathbb{N}$ gilt.*

2026 ORKURS
Fachschaft Mathematik + Elementar-mathematik
C.v.O. Universität Oldenburg

× Aufgabe 2: Komposition

Seien die folgenden Abbildungen gegeben

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & f(x) = x^2 + x \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & g(x) = x + 3 \\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad & h(x) = x^3 \end{aligned}$$

Berechne:

(a) $(f \circ g)(3)$ *Lösung:* $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3+3) = f(6) = 6^2 + 6 = 42$

(b) $(g \circ h \circ f)(2)$ *Lösung:* $(g \circ h \circ f)(2) = g(h(f(2))) = g(h(6)) = g(216) = 219$

(c) $(h \circ g)(3)$ *Lösung:* $(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(6) = 216$

(d) $(f \circ g)(x)$. Vereinfache soweit wie möglich!
Lösung:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) &= (x+3)^2 + x + 3 \\ &= x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3) \end{aligned}$$

× Aufgabe 3: Bild und Urbild

Beweise oder widerlege folgende Aussagen zum Bild und Urbild einer Funktion.

(a) Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Dann gilt $f(f^{-1}(N)) = N$ und $f^{-1}(f(M)) = M$.
Lösung:

- $f(f^{-1}(N)) \neq N$ *für* $N = M = \mathbb{R}$ *und* $f(x) = x^2$
- $f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(\{f(x) \mid x \in M\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{f(m) : m \in M\}\}$, *also stimmt die Aussage tatsächlich, da für jedes* $x \in M$ *ein* $f(x) \in f(M)$ *existiert. Im Gegensatz dazu existiert im ersten Fall nicht zu jedem* $y \in N$ *ein (Urbild)* $x \in M$ *mit* $f(x) = y$. *Das ist hier der entscheidende Unterschied – diese zweite Aussage gilt also nur auf Grund der Wohldefiniertheit von Abbildungen.*

(b) Sei nun $A \subsetneq M$ und $B \subsetneq N$. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ und $f^{-1}(f(A)) = A$.
Lösung:

- *Die erste Aussage stimmt nicht, da die entsprechende Aussage in (a) bereits nicht stimmte. Wir könnten im gleichen Setting wie in der entsprechenden Teilaufgabe in (a) hier* $B := [-10, \infty)$ *setzen. Dann ist* $f(f^{-1}(B)) = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq B$.
- *Die zweite Aussage stimmt hier ebenfalls nicht. Betrachten wir die Abbildung* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, *die jeden Wert auf die* 0 *abbildet, so gilt beispielsweise mit* $A := [0, 1]$, *dass* $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \neq A$ *ist.*

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ gegeben. Dann gilt $f^{-1}(\{x\}) = \{\sqrt{x}\}$. *Lösung: Diese Aussage ist falsch. Es gilt z.B.* $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ *und* $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$. *Allgemein gilt hier:*

$$f^{-1}(\{x\}) = \begin{cases} \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}, & \text{falls } x \geq 0 \\ \varnothing, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4: Wir bauen eine Abbildung

Falls möglich, finde geeignete Mengen M und N, sowie eine Abbildung $f : M \to N$, sodass die jeweiligen Bedingungen gelten. Falls es nicht möglich ist, solche Mengen und eine solche Abbildung anzugeben, begründe warum.

(a) Es sei $\{1, 2, \ldots, 10\} \subseteq M$ und $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq N$. Das Bild $f(\{2, 3, 5, 7\})$ ist $\{1\}$ und es gilt $f(M) = N$.

Lösung: Wähle zum Beispiel $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$ *und* $N = \{0, 1, 2, 3\}$ *und sei dazu*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \text{falls } x \in \{1\}, \\ f(x) &= 1, \quad \text{falls } x \in \{2, 3, 5, 7\}, \\ f(x) &= 2, \quad \text{falls } x \in \{4, 6, 8, 10\}, \\ f(x) &= 3, \quad \text{falls } x \in \{9\}. \end{aligned}$$

(b) Das Bild $f(\{\text{Daniel, Ivan, Boris}\})$ ist $\{\text{Analysis}\}$, das Urbild $f^{-1}(\{\text{Analysis}\})$ ist ungleich $\{\text{Daniel, Ivan, Boris}\}$ und das Urbild $f^{-1}(\{\text{Stochastik}\})$ ist $\{\text{Marcus, Angelika, Peter}\}$.

Lösung: Wir wählen zum Beispiel

$M := \{\textit{Daniel}, \textit{Ivan}, \textit{Boris}, \textit{Hannes}, \textit{Marcus}, \textit{Angelika}, \textit{Peter}\},\ N := \{\textit{Analysis}, \textit{Stochastik}\}$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= \textit{Analysis}, \quad \textit{für } x \in \{\textit{Daniel}, \textit{Ivan}, \textit{Boris}, \textit{Hannes}\}, \\ f(x) &= \textit{Stochastik}, \quad \textit{für } x \in \{\textit{Marcus}, \textit{Angelika}, \textit{Peter}\}. \end{aligned}$$

c) $\#M \geq 5$, $\#M > \#N$ und keine zwei verschiedenen Elemente aus M bilden auf dasselbe Element in N ab.

Lösung: Eine solche Abbildung kann nicht existieren, da im Definitionsbereich mehr Elemente vorhanden sind als im Wertebereich. Wenn zwei verschiedene Elemente aus dem Definitionsbereich auf verschiedene Elemente abgebildet werden sollen, müssen im Wertebereich mindestens genau so viele Elemente wie im Definitionsbereich vorhanden sein.

d) $\#M \geq 5$, $\#M < \#N$ und keine zwei verschiedenen Elemente aus M bilden auf dasselbe Element in N ab.

Lösung: Wähle zum Beispiel $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *und* $N = \{11, 12, \ldots, 20\}$ *mit* $f(x) = x + 10$.

(e) Die Mächtigkeit des Wertebereichs von f ist unendlich und das Bild $f(M)$ ist endlich. *Lösung:* $M := \mathbb{R}$, $N := \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

(!f) $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$. *Lösung: Für $x \in \mathbb{Q}$ setzen wir $f(x) := [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ („Gaußklammer“ $\widehat{=}$ abrunden). Damit gilt $f(x) \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(n) = n$ und $n \in \mathbb{Q}$, also haben wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Urbild in $\mathbb{Q}$ gefunden – es gilt also $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.*

! Aufgabe 5

Beweise für eine Abbildung $f : M \to N$ die folgenden Aussagen über das Urbild und das Bild von f:

(a) Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$$

(b) Seien $M_1, M_2 \subseteq N$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2)$$

Lösung:

(a): Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ nicht-leere Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(M_1 \cup M_2) &= \{f(x) \mid x \in (M_1 \cup M_2)\} = \{f(x) \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in M_1\} \cup \{f(x) \mid x \in M_2\} = f(M_1) \cup f(M_2) \end{aligned}$$

Hinweis für die Tutoren: Gerne können hier auch beide Teilmengeninklusionen separat gezeigt werden. Dies ist (insbesondere am Anfang) etwas einfacher, strukturierter und vor allem weniger fehleranfällig.

(b): Seien $M_1, M_2 \subseteq N$ nicht-leere Mengen, dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(M_1 \cup M_2) &= \{x \in M \mid f(x) \in M_1 \cup M_2\} = \{x \in M \mid f(x) \in M_1 \text{ oder } f(x) \in M_2\} \\ &= \{x \in M \mid f(x) \in M_1\} \cup \{x \in M \mid f(x) \in M_2\} = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2) \end{aligned}$$