Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Vollständige Induktion

× Aufgabe 1: Explizite Formeln

Zeige die folgenden Identitäten mit vollständiger Induktion.
Tipp für (b): Im Induktionsbeweis von vorne und von hinten arbeiten

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 3 = 4 - 1 = 2^{1+1} - 1.$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1.$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) + 2^{n+1} \\
&\overset{IV}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

! (c)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in (0,\infty)\backslash\{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = x + 1 = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^{1+1}-1}{x-1}$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\forall x \in (0,\infty)\backslash\{1\} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Zu zeigen:

$$\forall x \in (0,\infty)\backslash\{1\} \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

Induktionsbeweis: *Sei $x \in (0,\infty)\backslash\{1\}$ Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \\
&\overset{IV}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+(x-1)x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1+1}-x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

× Aufgabe 2: Schokolade

(a) Betrachte eine Tafel Schokolade, die aus 24 Stückchen (4 Riegel mit jeweils 6 Stücken) besteht. Die Tafel soll an ihren Sollbruchstellen in die 24 einzelnen Stücke

gebrochen werden. In jedem Schritt kann ein exsitierendes Teil entzwei gebrochen werden, dabei können Stücke jedoch nicht aufeinandergelegt werden. Wie oft musst du die Tafel Schokolade brechen, bis alle 24 Stücke vor dir liegen? *Lösung: Mit jedem Brechvorgang wird ein zusätzliches Stück Schokolade generiert, sodass nach dem ersten Brechen zwei Stücke, nach dem zweiten Brechen drei Stücke und folgend nach dem 23. Brechen 24 Stücke vorliegen.*

(b) Wir wollen nun eine allgemeinere Schokoladentafel betrachten: Diese weist keine festen Riegel auf, sondern besteht aus n Stücken und soll auf gleiche Weise zerlegt werden. Wie oft muss diese Tafel gebrochen werden, um n einzelne Stücke zu erhalten? Leite eine Formel her und zeige ihre Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.
Lösung: Nach obigem Muster erhalten wir:

Behauptung: *Um n Stücke zu erhalten, muss die Tafel $n-1$ mal gebrochen werden.*

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Um 2 Stücke zu erhalten, muss die Tafel $2 - 1 = 1$ mal gebrochen werden, da zu Beginn die Tafel als ein ganzes Stück vorliegt.
Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

> ***Induktionsvoraussetzung (IV):***
> *Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, d.h.*
> *um n Stücke zu erhalten, muss die Tafel $n - 1$ mal gebrochen werden.*
>
> ***Zu zeigen:*** *Um $n + 1$ Stücke zu erhalten, muss die Tafel $n + 1 - 1 = n$ mal gebrochen werden.*
>
> ***Induktionsbeweis:*** *Betrachte eine Schokoladentafel, die in $n+1$ Stücke zerbrochen wurde. Lege zwei dieser Stücke so zusammen, dass sie wie eines aussehen. Wir betrachten die nun vorliegenden n Stücke: Nach IV musste die Tafel $n-1$ mal gebrochen werden, um diese n Stücke zu erhalten. Um schließlich die wie ein Stück aussehnden zwei Stücke wieder zu trennen, wird ein zusätzlicher Brechvorgang erforderlich. Insgesamt muss die Tafel also $n - 1 + 1 = n$ mal gebrochen werden, um $n + 1$ Stücke zu erhalten.*
> *Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Aufgabe 3: Teilbarkeit

Zeige die folgenden Teilbarkeiten mit vollständiger Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ teilt } n^2 + n \text{ (schreibe: } 2 \mid n^2 + n)$$

Lösung:

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt:

$$2 \mid (1^2 + 1)$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2 \mid n^2 + n$$

Zu zeigen:

$$2 \mid (n+1)^2 + (n+1)$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= (n^2 + 2n + 1) + (n+1) \\ &= n^2 + 3n + 2 \\ &= (n^2 + n) + (2n + 2) \\ &= (n^2 + n) + 2(n+1)\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $n^2 + n$ durch 2 teilbar. $2(n+1)$ ist offensichtlich ebenfalls durch 2 teilbar. Damit ist auch die Summe beider, also $n^2 + n + 2(n+1)$, durch 2 teilbar und so gilt nach der obigen Gleichungskette auch

$$2 \mid (n+1)^2 + (n+1),$$

was zu zeigen war.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

! (b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid (5^n + 7)$$

Dabei bedeutet $4 \mid l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $l = 4k$. *Lösung:*

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Es gilt wegen $5^1 + 7 = 12$:

$$4 \mid (5^1 + 7)$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$4 \mid (5^n + 7)$$

Zu zeigen:

$$4 \mid (5^{(n+1)} + 7)$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}(5^{n+1}+7) &= (5^{n+1}+7+\underbrace{28-28}_{=0})\\ &= (5\cdot 5^n+35-28)\\ &= (5\cdot(5^n+7)-28)\end{aligned}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist 5^n+7 *durch* 4 *teilbar.* 28 *ist offensichtlich ebenfalls durch* 4 *teilbar. Daher liefert die obige Gleichungskette, dass*

$$4 \mid (5^{n+1}+7)$$

gilt, womit der Induktionsschritt vollendet ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

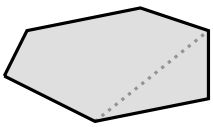
Aufgabe 4: Innenwinkelsumme

Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks beträgt mit $n \geq 3$ stets $(n-2)\cdot 180°$.
Beweise die Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.
Hinweis: Du darfst als bekannt voraussetzen, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks $180°$ *beträgt.*
Lösung:
Induktionsanfang: $(n=3)$
Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt $(3-2)\cdot 180° = 180°$.
Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, *d.h.*
die Innenwinkelsumme eines n*-Ecks beträgt mit* $n \geq 3$ *stets* $(n-2)\cdot 180°$.

Zu zeigen: *Die Innenwinkelsumme eines* $(n+1)$*-Ecks beträgt* $((n+1)-2)\cdot 180° = (n-1)\cdot 180°$.

Induktionsbeweis: *Sei ein* $(n+1)$*-Eck gegeben. Wir unterteilen es in ein* n*-Eck sowie ein Dreieck, indem wir zwei Ecken verbinden, zwischen denen genau eine Ecke liegt:*



Nach Induktionsvoraussetzung hat das n*-Eck eine Innenwinkelsumme von* $(n-2)\cdot 180°$. *Die Innenwinkelsumme des* $n+1$*-Ecks ergibt sich aus der Innenwinkelsumme des* n*-Ecks plus der Innenwinkelsumme des Dreiecks, also* $(n-2)\cdot 180° + 180° = ((n-2)+1)\cdot 180° = (n-1)\cdot 180°$.

2026 ORKURS
Fachschaft Mathematik+ Elementar-mathematik
C.v.O. Universität Oldenburg

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

× Aufgabe 5: Stimmt das?

Gegeben sei folgender Induktionsbeweis:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Für $n = 1$ gilt:

$$2^1 = 2 > 1 = 1^2$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2^n > n^2$$

Zu zeigen:

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{>}_{I.V} n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

(a) Rechne die Formel für $n = 2, \ldots, 6$ nach. Was fällt auf?

Lösung:

$n = 2 : 2^2 = 4 > 4 = 2^2$ *ist falsch*
$n = 3 : 2^3 = 8 > 9 = 3^2$ *ist falsch*
$n = 4 : 2^4 = 16 > 16 = 4^2$ *ist falsch*
$n = 5 : 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ *ist richtig*
$n = 6 : 2^6 = 64 > 36 = 2^2$ *ist richtig*
usw.

(b) Finde den Fehler im Induktionsbeweis.

Lösung: $n^2 > 2n+1$ *gilt nicht für* $n < 3$. *Da der Induktionsanfang dann erst wieder für* $n = 5$ *gilt, gilt die Aussage sogar (mindestens) nicht für* $n < 5$.

(c) Überlege, wie man Aussage und Beweis verändern kann, um das Problem zu vermeiden.

Lösung: Zum einen müsste man zeigen, dass $n^2 > 2n + 1$ (Dieses ist auch durch Vollständige Induktion möglich). Zum anderen muss die Behauptung wie folgt geändert werden:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5} : 2^n > n^2$$

und beginne im Induktionsanfang mit $n = 5$.

! Aufgabe 6

Zeige folgende Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1}\ \forall n \geq 2 :\ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Lösung: ***Induktionsanfang:*** $(n = 2)$

Für $n = 2$ gilt:

$$(1+x)^2 \underbrace{=}_{\text{Bin. Formel}} 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n+1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \geq 2$, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1} :\ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Zu zeigen:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1} :\ (1+x)^{(n+1)} \geq 1 + (n+1)x.$$

Induktionsbeweis: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\underbrace{\geq}_{\text{I.V.}} (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&= 1 + (1+n)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \geq 2$ gilt.