Vorkurs Mathematik 2026 | Aufgaben zum Thema

Vollständige Induktion

× Aufgabe 1: Explizite Formeln

Zeige die folgenden Identitäten mit vollständiger Induktion.
Tipp für (b): Im Induktionsbeweis von vorne und von hinten arbeiten

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

! (c)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in (0,\infty)\backslash\{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

× Aufgabe 2: Schokolade

(a) Betrachte eine Tafel Schokolade, die aus 24 Stückchen (4 Riegel mit jeweils 6 Stücken) besteht. Die Tafel soll an ihren Sollbruchstellen in die 24 einzelnen Stücke gebrochen werden. In jedem Schritt kann ein exsitierendes Teil entzwei gebrochen werden, dabei können Stücke jedoch nicht aufeinandergelegt werden. Wie oft musst du die Tafel Schokolade brechen, bis alle 24 Stücke vor dir liegen?

(b) Wir wollen nun eine allgemeinere Schokoladentafel betrachten: Diese weist keine festen Riegel auf, sondern besteht aus n Stücken und soll auf gleiche Weise zerlegt werden. Wie oft muss diese Tafel gebrochen werden, um n einzelne Stücke zu erhalten? Leite eine Formel her und zeige ihre Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.

×= Wichtige Aufgabe

!= Schwierige Aufgabe

Aufgabe 3: Teilbarkeit

Zeige die folgenden Teilbarkeiten mit vollständiger Induktion

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \text{ teilt } n^2 + n \text{ (schreibe: } 2 \mid n^2 + n)$$

! (b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid (5^n + 7)$$

Dabei bedeutet $4 \mid l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $l = 4k$.

Aufgabe 4: Innenwinkelsumme

Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks beträgt mit $n \geq 3$ stets $(n-2) \cdot 180°$.
Beweise die Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.
Hinweis: Du darfst als bekannt voraussetzen, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks $180°$ *beträgt.*

× Aufgabe 5: Stimmt das?

Gegeben sei folgender Induktionsbeweis:

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n^2$$

Beweis: (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Für $n = 1$ gilt:

$$2^1 = 2 > 1 = 1^2$$

Induktionsschritt: $(n \rightsquigarrow n + 1)$

Induktionsvoraussetzung (IV):
Gelte die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$2^n > n^2$$

Zu zeigen:

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

Induktionsbeweis: Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{>}_{I.V} n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. □

(a) Rechne die Formel für $n = 2, \ldots, 6$ nach. Was fällt auf?

(b) Finde den Fehler im Induktionsbeweis.

(c) Überlege, wie man Aussage und Beweis verändern kann, um das Problem zu vermeiden.

! Aufgabe 6

Zeige folgende Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{>-1}\ \forall n \geq 2 :\ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$