Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

# Schulmathematik I

## Aufgabe 1: Verkürzende Operatoren

a) Berechne für die Zahlen in der Tabelle

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 1 | 0 | 6 | 2 | 2 | 3 |
| $b_k$ | 2 | 5 | 1 | 7 | 2 | 9 |

die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{k=1}^{6} a_k, \qquad \prod_{k=1}^{6} (a_k + b_k), \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k \cdot b_k, \qquad \left(\sum_{k=1}^{6} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} b_k\right)$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne folgende Summe:

$$\sum_{k=-1}^{8} (n+1)^3$$

c) Verschiebe die Indizes der folgenden Summe so, dass sie mit nur einem Summenzeichen geschrieben werden kann. Vereinfache diese dann so weit wie möglich.

$$\sum_{k=2}^{23} (k-1)^2 + \sum_{l=-2}^{19} 2(l+3) + \sum_{m=10}^{31} 1$$

*Lösung:*

*a)*

$$14, \qquad 45360, \qquad 53, \qquad 364$$

*b)*

$$10 \cdot (n+1)^3$$

*c)*

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{22} k^2 + \sum_{l=1}^{22} 2l + \sum_{m=1}^{22} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{22} k^2 + 2k + 1 \qquad \textit{(binomische Formel)} \\
&= \sum_{k=1}^{22} (k+1)^2 \\
&= \sum_{k=2}^{23} k^2 \\
&(=4323)
\end{aligned}
$$

## × Aufgabe 2: Quadratische Ergänzung

Berechne die reellen Lösungen der Gleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung.

i) $x^2 + x - 2 = 0$
*Lösung:* $x_1 = 1$ , $x_2 = -2$

ii) $2x^2 + 8x - 10 = 0$
*Lösung:* $x_1 = -5$ , $x_2 = 1$

iii) $x^2 + 35x - 3 = 11x - 147$
*Lösung:* $x = -12$

## × Aufgabe 3: Polynomgleichungen höherer Ordnung

Bestimme die reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

i) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$
*Lösung: Man führt eine Polynomdivision durch.* $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x-2)(x+5)$*, also sind* $-1, 2, -5$ *alle Lösungen.*

ii) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
*Lösung: Anstelle einer Polynomdivision, die auch möglich ist, bietet sich hier eine Substitution an. Wir substituieren* $x^2 = z$ *und erhalten die neue Gleichung* $z^2 - 3z + 2 = 0$*. Mithilfe der pq-Formel erhalten wir die Lösungen* $z_1 = 1$ *und* $z_2 = 2$*. Rücksubstitution liefert die Lösungen* $-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$*.*

iii) $-3x^3 - 33x^2 - 117x = 135$
*Lösung: Man führt eine Polynomdivision durch.* $-3x^3 - 33x^2 - 117x - 135 = -3(x+5)(x+3)^2$*, damit sind* $-5$ *und* $-3$ *alle Lösungen.*

## Aufgabe 4: Quadratische Gleichungen

Neben der quadratischen Ergänzung steht uns zum Lösen quadratischer Gleichungen auch die *pq-Formel* zur Verfügung. Diese soll hier zunächst erklärt werden.

**Satz I (*pq*-Formel)**
Gegeben sei die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Zahlen $p$ und $q$. Dann löst

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

die Gleichung.
(Genauer: Man erhält sogar alle Lösungen. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist, gibt es keine reelle Lösung. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ gilt, ist die Lösung eindeutig.)

Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen mit der pq-Formel.

a) $18x^2 - 9x + 1 = 0$
*Lösung:* $x_1 = \frac{1}{3}$ , $x_2 = \frac{1}{6}$

b) $x^2 + 35x - 3 = 11x - 147$
*Lösung:* $x = -12$

## ! Aufgabe 5: Herleitung der pq-Formel

Leite die *pq*-Formel her, indem du auf die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die quadratische Ergänzung anwendest.

*Lösung:*

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + px + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow\ & x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

## Aufgabe 6: Lineare Gleichungssysteme

a) Löse die folgenden Gleichungssysteme.

i)

$$3x + 2y = 20$$
$$9x - 3y = -3$$

ii)

$$2x + 3y - z = 1$$
$$x + 3y + z = 2$$
$$-2x - 2y + 4z = 4$$

*Lösung:*

$$i) x = 2, y = 7$$
$$ii) x = 3, y = -1, z = 2$$

b) Ergänze die Gleichung $3x - 2y = 5$ zu je einem Gleichungssystem aus zwei Gleichungen, das

i) unlösbar ist.
*Lösung: Nutze $3x - 2y = 6$ als zweite Gleichung. Die Aussagen stehen im Widerspruch zueinander. Andere Beispiele denkbar!*

ii) genau eine reelle Lösung hat.
*Lösung: Nutze $y = 1$ als zweite Gleichung. Eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir eine eindeutige Lösung für $x$. Andere Beispiele denkbar!*

iii) unendlich viele Lösungen hat.
*Lösung: Nutze die Gleichung $3x - 2y = 5$ auch als zweite Gleichung. Es gibt nun unendlich viele Lösungspaare z.B. $x = 2$ und $y = 0$ oder $x = 0$ und $y = -3$. Andere Beispiele denkbar!*

## ! Aufgabe 7: Satz von Vieta

**Satz II (Satz von Vieta)**
Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Zahlen $p, q$ die Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ mit ebenfalls reellen Zahlen $a, b$, dann ist $-p = a + b$ und $q = ab$.

a) Bestimme mit dem Satz von Vieta Kandidaten für Lösungen der folgenden Gleichungen. Überprüfe diese dann durch Einsetzen in die Gleichungen.

i) $x^2 + 8x - 20 = 0$
*Lösung: Betrachte zunächst das Produkt der Lösungen. Es soll gelten, dass* $a \cdot b = -20$. *Dabei ergeben sich als mögliche Kandidaten für die Lösungen der Gleichung zunächst zum Beispiel:*
$a = -4$ *und* $b = 5$, $a = 4$ *und* $b = -5$, $a = -2$ *und* $b = 10$, $a = 2$ *und* $b = -10$, $a = -1$ *und* $b = 20$, $a = 1$ *und* $b = -20$, ...
*Zusätzlich sollen die Lösungen* $a + b = -8$ *erfüllen. Dies gilt für* $a = 2$ *und* $b = -10$.
*Einsetzen ergibt nun, dass* $a = 2$ *und* $b = -10$ *tatsächlich die Gleichung lösen. Da eine quadratische Gleichung nicht mehr als zwei Lösungen haben kann, haben wir damit alle Lösungen gefunden.*

ii) $x^2 - 6x - 16 = 0$
*Lösung: Analog zu a): Das Produkt* $a \cdot b = -16$ *ergibt als mögliche Kandidaten zunächst:*
$a = -4$ *und* $b = 4$, $a = -2$ *und* $b = 8$, $a = 2$ *und* $b = -8$, $a = -1$ *und* $b = 16$, $a = 1$ *und* $b = -16$, ...
*Außerdem soll für die Summe gelten, dass* $a + b = -(-6) = 6$. *Damit bleiben* $a = -2$ *und* $b = 8$ *als mögliche Lösungen.*
*Einsetzen ergibt dann, dass diese die Gleichung wirklich erfüllen. Da eine quadratische Gleichung nicht mehr als zwei Lösungen haben kann, haben wir damit alle Lösungen gefunden.*

b) Leite den Satz von Vieta her.
*Lösung: Erster Teil. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind* $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ *und* $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. *Addieren wir beide Gleichungen, bleibt* $x_1 + x_2 = -p$.

*Zweiter Teil. Multiplizieren wir die beiden obigen Gleichungen miteinander erhalten wir* $x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$. *Auf der rechten Seite nutzen wir die dritte binomische Formel und erhalten* $x_1 \cdot x_2 = q$