Vorkurs Mathematik 2026 | Aufgaben zum Thema

Beweistechniken II

Aufgabe 1: Kontraposition I

Zeige folgenden Satz mittels Beweis durch Kontraposition.

Satz I
Ist für $x, y \in \mathbb{R}$ das Produkt xy irrational, so muss eine der Zahlen x oder y irrational sein.

Aufgabe 2: Kontraposition II

Zeige folgenden Satz mittels Beweis durch Kontraposition.

Satz II
Ist n eine ganze Zahl und n^2 gerade, so ist n gerade.

Aufgabe 3: Widerspruchsbeweis

Zeige folgenden Satz mittels Widerspruchsbeweis.

Satz III
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit x irrational und y rational. Dann ist $x + y$ irrational.

Aufgabe 4: Größte natürliche Zahl

Finde den Fehler in folgendem falschen Beweis:
Behauptung: 1 ist die größte natürliche Zahl.
Beweis: Sei N die größte natürliche Zahl. Angenommen, $N \neq 1$. Dann ist $N > 1$. Dann ist aber $N^2 > N$, also N nicht die größte natürliche Zahl, ein Widerspruch. Also muss 1 die größte natürliche Zahl sein. □

Aufgabe 5: Quadratwurzel

(a) Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$. Definiere formal das Symbol $\sqrt{a}$ für die Quadratwurzel von a.

!(b) Beweise Satz IV!

Satz IV
Die Quadratwurzel aus 2 ist irrational.

Hinweis: Verwende einen Widerspruchsbeweis und stelle $\sqrt{2}$ als gekürzten Bruch dar. Benutze Satz II, um mehr über diesen Bruch herauszufinden.

! Aufgabe 6: Primzahlen

Beweise folgenden Satz über Primzahlen.

Satz V
Jede natürliche Zahl größer als 1 hat einen Primteiler.

Hierbei helfen folgende Definitionen:

Definition VI
Seien $a, n \in \mathbb{Z}$. a heißt ein **Teiler** von n, falls es eine ganze Zahl q gibt mit $n = qa$.

Die dafür übliche Schreibweise lautet $a|n$. In Worten: a **teilt** n.

Definition VII
Sei $p \in \mathbb{N}$ und $p > 1$. p heißt eine **Primzahl**, falls 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind, die p teilen. Ansonsten heißt p **zusammengesetzt**.

Definition VIII
Seien $p, n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$. p heißt ein **Primteiler** von n, falls p eine Primzahl ist und n teilt.