Vorkurs Mathematik 2026 | Lösungen zum Thema

Beweistechniken I

× Aufgabe 1: Quadrate ungerader Zahlen

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

Satz I
Das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl ist wieder ungerade.

Lösung: Voraussetzung: Sei $m \in \mathbb{Z}$ ungerade.
Behauptung: m^2 ist ungerade.
Beweis: Da m ungerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $m = 2k + 1$. Damit ist $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Da $(2k^2 + 2k)$ wieder eine ganze Zahl ist, ist m^2 ungerade. □

× Aufgabe 2: Gerade Zahlen?

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

Satz II
Ist n eine ganze Zahl, so ist $n + n^2$ gerade.

Hinweis: Fallunterscheidung in n gerade und n ungerade.
Lösung: Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{Z}$.
Behauptung: $n + n^2$ ist gerade.
Beweis: Fall 1: n gerade. Dann ist nach Satz 7.5 auch n^2 gerade und damit nach Satz 7.1 $n + n^2$ gerade.
Fall 2: n ungerade. Dann ist nach Aufgabe 1 auch n^2 ungerade, und wieder nach Satz 7.1 $n + n^2$ gerade. □

Aufgabe 3: Ein Mengenbeweis

Zeige, dass für Mengen A, B, C die Relation

$$(A \cup B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

gilt. Schreibe wieder vorher Voraussetzung und Behauptung auf.
Lösung: Voraussetzung: Seien A, B, C Mengen.
Behauptung: $(A \cup B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ Beweis: Sei $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Fall 1: $x \in A \setminus C$, *d.h.* $x \in A$ *und* $x \notin C$. *Wegen* $x \in A$ *ist auch* $x \in A \cup B$. *Da noch zusätzlich* $x \notin C$ *gilt, ist also* $x \in (A \cup B) \setminus C$.
Fall 2: $x \in B \setminus C$, *d.h.* $x \in B$ *und* $x \notin C$. *Wegen* $x \in B$ *ist auch* $x \in A \cup B$. *Da noch zusätzlich* $x \notin C$ *gilt, ist also* $x \in (A \cup B) \setminus C$. □

! Aufgabe 4: Dreiecksungleichung

Es sei an die Definition des Betrages erinnert:

Definition III
Sei $x \in \mathbb{R}$. Der **Betrag** von x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Beweise folgenden Satz. Schreibe dabei zuerst Voraussetzung und Behauptung sauber auf.

Satz IV
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Hinweis: Welche Relation gilt zwischen x *und* $|x|$, *welche zwischen* $-x$ *und* $|x|$? *Mache außerdem eine Fallunterscheidung für beide Fälle, die für* $x + y$ *auftreten können.*
Lösung: Voraussetzung: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.
Behauptung: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Beweis: Es gilt für $z \in \mathbb{R}$ *stets* $z \leq |z|$, *da* $z = |z|$ *falls* $z \geq 0$, *und* $z \leq 0 \leq |z|$ *falls* $z < 0$.
Außerdem ist $-z \leq |z|$, *da* $-z \leq 0 \leq z = |z|$, *falls* $z \geq 0$, *und* $-z = |z|$, *falls* $z < 0$.
Fall 1 Sei $x + y \geq 0$. *Es ist* $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, *also* $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Fall 2 Sei $x+y < 0$. *Es ist* $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$, *also* $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$. □